Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 19-20

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

18 februari 2016

Bestäm de fyra första nollskilda termerna i en potensserieutveckling kring $x = 0$ av lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' + (x+2)y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Svar: $y = 1 - 2x + (3/2)x^2 - (1/3)x^3 + \dots$

Lösningsförslag: Ansätt $\quad y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$2c_0 + c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k-1} + 2c_k + (k+1) c_{k+1} \right) x^k = 0$$

Lösningsförslag: Ansätt $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$2c_0 + c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k-1} + 2c_k + (k+1) c_{k+1} \right) x^k = 0$$

Lösningsförslag: Ansätt $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$2c_0 + c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k-1} + 2c_k + (k+1) c_{k+1} \right) x^k = 0$$

Lösningsförslag: Ansätt $\quad y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$2c_0 + c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k-1} + 2c_k + (k+1) c_{k+1} \right) x^k = 0$$

Ekv. system:

$$2c_0 + c_1 = 0$$

$$c_{k+1} = -\frac{2c_k + c_{k-1}}{k+1}, \quad k \geqslant 1$$

BV:$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_0 = 1$. Vidare: $c_1 = -2c_0 = -2$.

k	Koefficient
1	$c_2 = -\dfrac{2c_1 + c_0}{2} = \dfrac{3}{2}$
2	$c_3 = -\dfrac{2c_2 + c_1}{3} = -\dfrac{1}{3}$

Svar: $y = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \ldots$

Struktur

Laplacetransformen

En av de mest effektiva metoderna inom den tillämpade matematiken är de s.k. Laplacetransformerna. Arkitekten bakom detta förnämliga verktyg är fransmannen Pierre Simon Laplace (1749-1827), kallad "Frankrikes Newton".

I en uppsats från 1812 presenterar Laplace en integral, som sedermera visat sig få enorm betydelse i lösningen av vissa differentialekvationer.

Laplacetransformen $F(s)$ är en konvergent generaliserad integral

Definition

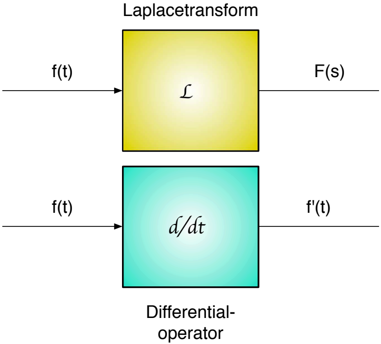
Laplacetransformen $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *av en funktion* $f(t)$, $t \geqslant 0$, *är*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \tag{1}$$

förutsatt att integralen existerar och är konvergent.

Transform=Avbildning

Transformer är ett begrepp som avbildar funktioner på andra funktioner. Jämför med t. ex. en differentialoperator, en annan avbildning.



Betrakta potensserien $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Om vi t. ex. väljer $a_n = \dfrac{1}{n!}$, kan vi tänka oss att $\dfrac{1}{n!} \rightsquigarrow e^x$, dvs. en "heltalsfunktion" avbildas på en reell funktion.

Intuitivt resonemang

Anta att $x > 0$. Laplacetransformen (1) kan sägas vara den kontinuerliga motsvarigheten till potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, där vi väljer "heltalsfunktionen" a_n så att serien konvergerar för $0 < x < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightsquigarrow \sum_{t=0}^{\infty} a(t) x^t \rightsquigarrow \int_0^{\infty} f(t) x^t \, dt \rightsquigarrow \int_0^{\infty} f(t) e^{(\ln x)t} \, dt \rightsquigarrow$$

$$\underbrace{(\text{Sätt } \ln x = -s)}_{0<x<1 \Rightarrow 0<s<\infty} \quad \rightsquigarrow \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt, \quad s > 0$$

Anmärkning

- I ovanstående definition (1) formuleras den s.k. *enkelsidiga Laplacetransformen*. Det existerar också en dubbelsidig L-transform, där integrationsintervallet är hela tallinjen.
- Ofta räcker det att parametern $s \in \mathbb{R}_+$, men i ett mer detaljerat studium måste vi anta att $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(s) \in \mathbb{R}_+$.
- I tillämpade sammanhang har t dimensionen tid, vilket innebär att s har dimensionen frekvens.

För att kunna L-transformeras, duger inte vilka funktioner som helst

Vi förutsätter att det existerar en funktionsfamilj där Laplacetransformen är definierad. Litet mer noggrant formulerat än ovanstående intuitiva resonemang, säger vi:

Låt $S(\mathbb{R}_+)$ beteckna familjen av alla styckvis kontinuerliga funktioner $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}$ med egenskapen att f inte växer för fort, dvs. om det finns konstanter C och a med

$$|f(t)| \leqslant Ce^{at}, \quad \text{för } t \in \mathbb{R}_+, \quad C, a > 0.$$

Man brukat säga att f växer högst exponentiellt (s. 3 lärobok (T)) om $f \in S(\mathbb{R}_+)$. Sådana funktioner passar bra att L-transformera.

Anmärkning

Vi konstaterar: Integralen (1) kan konvergera även om $f(t) \to \infty$ då $t \to \infty$, bara s är tillräckligt stort och att f inte skenar iväg.

Exempel $f(t) = e^{7t}$ ger, insatt i (1):

$$\int_0^X e^{7t} e^{-st}\, dt \to \frac{1}{s-7} \quad \text{då } X \to \infty \quad (\text{om } s > 7)$$

Övning Prova motsvarande resonemang med $f(t) = e^{e^t}$.

L-transformen är linjär

Eftersom Laplacetransformen är en integral, gäller lineāritetsegenskapen:

$$\mathcal{L}\{a\,f(t) + b\,g(t)\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\,(a\,f(t) + b\,g(t))\;dt = \ldots = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Att beräkna elementära L-transformer med definitionen

Exempel: $f(t) = 1$

För $s > 0$ är

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \ldots = \frac{1}{s}.$$

Anm: $\mathcal{L}\{K\} = \dfrac{K}{s}, \quad K \in \mathbb{R}.$

Exempel: $f(t) = e^{\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Låt $f(t) = e^{\alpha t}$. För $s - \alpha > 0$ är

$$F(s) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \ldots = \frac{1}{s-\alpha}.$$

Exempel: $f(t) = \sin bt$ eller $f(t) = \cos bt$

Vi transformerar den komplexvärda exponentialfunktionen $e^{ibt} = \cos(bt) + i\sin(bt)$ och identifierar därefter real- och imaginärdelar:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{ibt}\, dt = \int_0^\infty e^{-t(s-ib)}\, dt = \quad \text{(Tid. resultat)}$$

$$= \frac{1}{s-ib} = \frac{s+ib}{s^2+b^2} = \frac{s}{s^2+b^2} + i\frac{b}{s^2+b^2}$$

Identifiera real- och imaginärdelar

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}.$$

Alternativ: $f(t) = \cos bt$ med Eulers formel, FN s. 113

$$\text{Eulers formel: } \cos bt = \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{ibt} + e^{-ibt}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ib} + \frac{1}{s + ib}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 + b^2} = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

Exempel

Bestäm Laplacetransformen av

- $f(t) = 2\sin(2t) + 3\cos(3t)$
- $f(t) = \cosh(3t) = \dfrac{e^{3t} + e^{-3t}}{2}$
- $f(t) = \sinh(t) = \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2}$

Exempel: $f(t) = t$

Låt $f(t) = t$. För $s > 0$ är

$$F(s) = \int_0^\infty t\, e^{-st}\, dt = \text{(Part. int.)} = \frac{1}{s^2}.$$

Exempel: $f(t) = t^2$

Låt $f(t) = t^2$. För $s > 0$ är

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 \, e^{-st} \, dt = (\text{Part. int.}) = \frac{2}{s^3}.$$

Exempel: $f(t) = t^n$

Låt $f(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}$. För $s > 0$ är

$$F(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\, dt = (\text{Part. int.}) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Anm

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \dots \\ &= \frac{n(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1}{s^n}\mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

Frekvensderivering

För funktionen $f(t)$, med tillhörande Laplacetransform $F(s)$, gäller

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \quad \text{(Vi deriverar m.a.p. } s\text{)}$$

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty (-t)f(t)\,e^{-st}\,dt =$$

$$= -\mathcal{L}\{tf(t)\}.$$

Speciellt får vi

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} = F(s) \quad \text{(Vi frekvensderiverar)}$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot 1\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

Låt oss upprepa proceduren.

Nu gäller: $f(t) = t$, övertar rollen som $f(t) = 1$ hade.

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \mathcal{L}\{t \cdot t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Avslutande exempel, Lekt 19

Bestäm Laplacetransformen av $f(t) = t^2 + 2t + 3$.

$$F(s) = \int_0^\infty (t^2 + 2t + 3)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \mathcal{L}\{t^2\} + 2\mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{3\} = \qquad \text{(Termvis transf.)}$$

$$= \frac{2}{s^3} + 2 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}$$

Struktur

Lekt 19

Bestäm $\mathcal{L}\{\cos^2(t) + \sin^2(t)\}$ med eller utan fiffighet.

Laplacetabell

I praktiken behöver vi inte hålla på och integrera fram L-transformen. Vi nyttjar istället tabeller och diverse räkneregler.

Exempel Låt

$$f(t) = (2t+1)^2 + \cos 2t - \sin t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Bestäm dess Laplacetransform med tabell och räkneregler.

Inverstransformering

I det praktiska räknandet stöter man ofta på problemet att återskapa $f(t)$ från dess Laplacetransform.

I mer avancerade kurser visar man att $f(t)$ är entydigt bestämd av $F(s)$, dvs. om $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ så är $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Lägg också märke till att inverstransformen är linjär:

$$\mathcal{L}^{-1}\{cF_1 + dF_2\} = c\,\mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + d\,\mathcal{L}^{-1}\{F_2\}.$$

Inverstransformering i praktiken

För att inverstransformera följer vi ritualen

- Partialbråksuppdelning (om vi kan faktorisera nämnaren)/Kvadratkomplettering,
- Kolla eventuell dämpning (tas upp under nästa lektion),
- Tabellavläsning.

Exempel

Bestäm en funktion $f(t)$ med Laplacetransformen

$$F(s) = \frac{5s - 4}{(s-1)^2}$$

Derivator av Laplacetransformen

Under Lektion 19 tittade vi på frekvensderiveringen som ett hjälpmedel att transformera potensfunktionen $f(t) = t^n$.

Sats

Låt $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *och antag (som vanligt) att* f *är styckvis kontinuerlig på* $\mathbb{R}_+$ *och växer högst exponentiellt. Då gäller*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}.$$

Speciellt: $\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -F'(s).$

Bevis.

Vi visar specialfallet $\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -F'(s)$. Vi antar (som vanligt) att $f \in S(\mathbb{R}_+)$.

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = (F(s) \text{ är likf. konv.})$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(f(t)\, e^{-st}\right)\, dt = \int_0^\infty (-t)\, f(t)\, e^{-st}\, dt = -\mathcal{L}\{t\, f(t)\},$$

och vi är klara. Satsen följer sedan med ett induktivt resonemang.

$\square$

Avslutande exempel

Givet $\mathcal{L}\left\{t\cos(bt)\right\} = G(s) = \dfrac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$ ur tabell.

Bestäm $\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\}$.

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = \mathcal{L}\left\{t\,\overbrace{(t\cos(bt))}^{g(t)}\right\} = \mathcal{L}\left\{tg(t)\right\}$$

$$G'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}\right) = \frac{-2s^3+6sb^2}{(s^2+b^2)^3}.$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = -G'(s) = \frac{2s^3-6sb^2}{(s^2+b^2)^3} \quad \text{(Enl. satsen)}$$

Alt. övning: $\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = (-1)^2F''(s), \quad \text{där} \quad F(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}$

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = \mathcal{L}\left\{t\,\overbrace{(t\cos(bt))}^{g(t)}\right\} = \mathcal{L}\left\{tg(t)\right\}$$

$$G'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}\right) = \frac{-2s^3+6sb^2}{(s^2+b^2)^3}.$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = -G'(s) = \frac{2s^3-6sb^2}{(s^2+b^2)^3} \quad \text{(Enl. satsen)}$$

Alt. övning: $\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = (-1)^2F''(s), \quad \text{där} \quad F(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}$

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = \mathcal{L}\left\{ t\,\overbrace{\left(t\cos(bt)\right)}^{g(t)} \right\} = \mathcal{L}\left\{tg(t)\right\}$$

$$G'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}\right) = \frac{-2s^3+6sb^2}{(s^2+b^2)^3}.$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = -G'(s) = \frac{2s^3-6sb^2}{(s^2+b^2)^3} \quad \text{(Enl. satsen)}$$

Alt. övning: $\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = (-1)^2F''(s)$, där $F(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}$

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = \mathcal{L}\left\{t\,\overbrace{(t\,\cos(bt))}^{g(t)}\right\} = \mathcal{L}\left\{tg(t)\right\}$$

$$G'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}\right) = \frac{-2s^3+6sb^2}{(s^2+b^2)^3}.$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = -G'(s) = \frac{2s^3-6sb^2}{(s^2+b^2)^3} \quad \text{(Enl. satsen)}$$

Alt. övning: $\mathcal{L}\left\{t^2\cos(bt)\right\} = (-1)^2 F''(s), \quad \text{där} \quad F(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}$

Överkurs: Gammafunktionen

Låt $r > -1 \in \mathbb{R}$. För $s > 0$ har vi

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \int_0^\infty t^r \, e^{-st} \, dt = (st = x, dt = \frac{dx}{s}) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^r}{s^r} \, e^{-x} \, \frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{r+1}} \underbrace{\int_0^\infty x^r \, e^{-x} \, dx}_{\Gamma(r+1)} = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{n+1}}$$

Speciellt: Om $r = n \in \mathbb{N}$ gäller: $\Gamma(n+1) = n!$

Överkurs: Låt $r = -1/2$

För $s > 0$ har vi

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\} = \ldots = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Räkneruta

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2}\, e^{-x}\, dx = \quad \text{(Generaliserad i 0 och } \infty\text{)}$$

$$= (x = t^2, dx = 2tdt) = \int_0^\infty \frac{1}{t}\, e^{-t^2}\, 2t\, dt = 2 \underbrace{\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt}_{=\sqrt{\pi}/2}$$