# Matematik III M0039M, Lp 3 2016

## Lektion 2

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

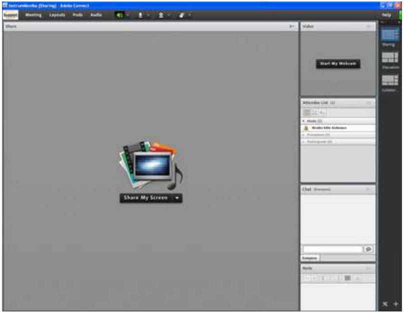
18 januari 2016

# Adobe Connect

Ove Edlund undervisar M0039M via Adobe Connect.

`connect.sunet.se/m0039m-vt16`

Hans föreläsningar spelas in och publiceras på Fronter.



# Lekt 1

- Bestäm belopp för komplexa talet $z = 4(1 - i)^6$.
- Vilka komplexa tal $z$ uppfyller $2z = z^* - 1 + 3i$?

**Anmärkning**

*För det komplexa talet $z = a + bi$ gäller som bekant att konjugatet $z^* = a - bi$.*

$zz^* = (a + bi)(a - bi) =$ *(konjugatregeln)* $= a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

# Andragradsekvationer

Nu skall vi presentera en metod för att lösa andragradsekvationer med komplexa koeffcienter.
Vi börjar dock med ett enkelt specialfall, nämligen andragradsekvationen

$$z^2 = \zeta \quad , \tag{1}$$

där $\zeta = \alpha + i\beta$.

# Ansats

Denna ekvation löser vi med ansatsen $z = a + ib$, vilket i sin tur ger att $z^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2ab$. Sätt in i (1). Identifiera real- resp. imaginärdelar i bägge led i (1), som ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & \alpha & \text{(Re-del lika)} \\ 2ab & = & \beta & \text{(Im-del lika OBS! Inget "i")} \end{cases}$$

Lös ut $a$ och $b$. Vi får till sist önskad lösning efter insättning av $a$ och $b$ i vår ansats.

# Exempel

Lös ekvationen

$$z^2 - (1 + i)z - (4 + 7i) = 0.$$

# Lösningsförslag

- Återför ekvationen på ovannämnda specialfall $z^2 = \zeta$ genom *kvadratkomplettering*.
- Gör ansatsen $z = a + ib$ och identifiera real- resp. imaginärdelar i bägge led. Detta ger ett system med reella obekanta.
  Det kan ibland vara lämpligt att också utnyttja sambandet $|z^2| = |\zeta|$.

# Exempel

- Lös ekvationen
$$(1+i)z^2 + (2-i)z - i = 0.$$
- Låt $z$ vara ett komplext tal som satisfierar
$$(8+4i)z^2 + 20z = 12 + i \quad .$$
Bestäm $|z|$.

Svar pkt 1: $z = -\frac{1}{i+1}$, $z = \frac{i-1}{i+1}$, pkt 2: $\sqrt{29}/2$, $1/2$

# Ekvationer, forts.

**Definition**

*Ett komplext polynom av grad n är ett uttryck av typen*

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

*där koeffcienterna* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *och* $a_n \neq 0$.
*Ett komplext tal* $z_0$ *som löser ekvationen* $P_n(z_0) = 0$ *kallas en rot till denna ekvation. Ett sådant tal kallas också ett nollställe till polynomet* $P_n(z)$.

# Faktorsatsen

Med hjälp av den s.k. *faktorsatsen* likställs problemet med att finna rötter till ekvationen $P_n(z) = 0$ med att finna förstagradsfaktorer i polynomet $P_n(z)$.

**Sats (Faktorsatsen)**

*Polynomet* $z - z_0$ *är delare i polynomet* $P_n(z) \Leftrightarrow z_0$ *är ett nollställe till* $P_n(z)$.

# Algebrans fundamentalsats

Man kan fråga sig om varje polynomekvation är lösbar. Lösbarheten garanteras i en avhandling från 1799, där C.F.Gauss bevisade

**Sats (Algebrans fundamentalsats)**

*Varje komplext polynom av åtminstone grad 1 har (minst) ett komplext nollställe.*

**Anmärkning**

*Om $P_n(z)$ är ett reellt polynom, dvs. ett polynom där koeffcienterna $a_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, är reella tal, gäller följande: Antag att $z_1$ är nollställe till det reella polynomet $P_n(z)$, dvs $P_n(z_1) = 0$. Då gäller för $z_2 = \overline{z_1}$:*

$$P_n(z_2) = P_n(\overline{z_1}) = \overline{P_n(z_1)} = \overline{0} = 0 \quad ,$$

*dvs. komplexa nollställen till reella polynom förekommer alltid parvis konjugerade.*

# Exempel

Man vet att polynomet

$$P(z) = z^4 - 5z^3 + 9z^2 - 8z + 2$$

har nollstället $1 - i$. Bestäm återstående nollställen.

# Avslutande exempel

- Betrakta följande algebraiska ekvation:

$$z^4 + 4z^3 + 14z^2 + 36z + 45 = 0 \quad .$$

En av lösningarna är $z = -2 + i$. Lös ekvationen fullständigt med hjälp av denna information.

# Lös på egen hand

- Lös ekvationen

$$z^2 + 2(1 - i)z = 3(7 - 6i)$$

Svar: $z = 4 - i$, $z = -6 + 3i$

# Läs (och lös) på egen hand

Vi vet att $\sqrt{-4} = \pm 2i$, men hur bestämmer vi t. ex. $\sqrt{7 - 24i}$?

**Exempel**

*Bestäm $z = x + iy$ så att $z^2 = 7 - 24i$.*

# Lösningsförslag

Två komplexa tal är lika precis då de har samma real- och imaginärdel.

$$x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = 7 - 24i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 & \text{(Re-del lika)} \\ 2xy = -24 & \text{(Im-del lika OBS! Inget "i")} \end{cases}$$

$$x = -\frac{12}{y} \quad \text{(Lös ut } x\text{, sedan insättning)}$$

$$\frac{144}{y^2} - y^2 = 7 \quad \text{(Sätt } u = y^2\text{, OBS } u > 0 \in \mathbb{R}\text{)}$$

$$144 - u^2 = 7u \quad (p - q\text{-andragradare})$$

$$u = \frac{-7 \pm 25}{2} \quad \text{(Enda kandidaten är } u = 9\text{, eller hur?)}$$

$$u = 9 \Rightarrow y = \pm 3, \quad \text{varav} \quad x = -\frac{12}{y} = \mp 4$$

Svar $z = \pm(4 - 3i)$

Övning: Kolla genom kvadrering att svaret stämmer.