Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 21-22

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

22 februari 2016

Lekt 19-20

För att inverstransformera följer vi ritualen

- Partialbråksuppdelning (om vi kan faktorisera nämnaren)/Kvadratkomplettering,
- Kolla eventuell dämpning (tas upp under denna lektion),
- Tabellavläsning.

(a) Inverstransformera

$$F(s) = \frac{5}{(s+1)(s^2+16)}$$

(b) Bestäm $\mathcal{L}\{t^3\}$ på (minst) två sätt.

Lösningsförslag, (b)

Alt 1

$$\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$$

Alt 2

$$\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = \mathcal{L}\left\{t \cdot \overbrace{t^2}^{g(t)}\right\} = \mathcal{L}\left\{t \cdot g(t)\right\}$$

$$G'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{-6}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = -G'(s) = \frac{6}{s^4}$$

Struktur

1. **Lektion 21: Dämpning och fördröjning**

2. Lektion 22: Laplacetransformering i praktiken

Dämpningssatsen

Antag att funktionen $f(t)$ beskriver ett förlopp, som dämpas exponentiellt med tiden. Det kan vi modellera på följande sätt:

$$e^{-at} f(t), \quad \text{där } a > 0,$$

beskriver en exponentiell dämpning. Hur bestämmer man dess Laplacetransform?

$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\})$

Sats (Dämpningssatsen)

För $s + a > 0$ *är*

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-t(s+a)} f(t)\, dt = F(s+a),$$

$$\textit{eftersom} \quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Anmärkningar

Anm 1: En dämpning på tidssidan innebär en translatering på frekvenssidan.

Anm 2: $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$. Dämpningssatsen gäller för godtyckliga $a \in \mathbb{C}$.

Anm 3: Minnesregel:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s \to s+a},$$

där $s \to s+a$ betyder att vi ersätter s med $s+a$ i $F(s)$.

Exempel

Bestäm $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\} = \mathcal{L}\{\cos 4t\}_{s\to s+2} = \qquad \text{(Tabell)}$$

$$= \left.\frac{s}{s^2+4^2}\right|_{s\to s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16}$$

Exempel

Bestäm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{(s-3)^2+2}\right\}$.

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s-3)^2+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}}_{\text{Tänk sinus}} \Bigg|_{s\to s-3} \right\} = e^{3t}\sin\sqrt{2}t$$

Exempel

Inverstransformera $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 6s + 18}$

Lösningsförslag

Nämnaren går ej att faktorisera i reella förstagradsfaktorer: Kvadratkomplettering!

$$\frac{1}{s^2+6s+18} = (\text{KK}) = \frac{1}{(s+3)^2+9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(s+3)^2+3^2}$$

$$\left(\frac{3}{s^2+3^2} = \mathcal{L}\{\sin(3t)\}\right) \rightsquigarrow f(t) = \frac{1}{3}\cdot e^{-3t}\sin(3t) \quad (\text{Dämpn.satsen})$$

$$\frac{1}{s^2+6s+18} = (\text{KK}) = \frac{1}{(s+3)^2+9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(s+3)^2+3^2}$$

$$\left(\frac{3}{s^2+3^2} = \mathcal{L}\{\sin(3t)\}\right) \rightsquigarrow f(t) = \frac{1}{3}\cdot e^{-3t}\sin(3t) \quad (\text{Dämpn.satsen})$$

Exempel: KK på frekvenssidan–dämpning på tidssidan

Inverstransformera $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 4s + 20}$

Lösningsförslag

Lösningen innehåller en del tekniska passager.

$$\frac{s}{s^2+4s+20} = \text{(KK)} = \frac{s}{(s+2)^2+16} =$$

Hela bråket ska bero på $s+2$: Omskrivning i täljaren.

Ansats: $s = \alpha(s+2)+\beta; \quad \alpha = 1, \quad \beta = -2$

$$= \frac{s+2-2}{(s+2)^2+16} = \underbrace{\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}}_{\rightsquigarrow e^{-2t}\cos(4t)} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{4}{(s+2)^2+4^2}}_{\rightsquigarrow e^{-2t}\sin(4t)} \quad \text{(Dämpn.satsen)}$$

$$\frac{s}{s^2+4s+20} = \text{(KK)} = \frac{s}{(s+2)^2+16} =$$

Hela bråket ska bero på $s+2$: Omskrivning i täljaren.

Ansats: $s = \alpha(s+2)+\beta; \quad \alpha = 1, \quad \beta = -2$

$$= \frac{s+2-2}{(s+2)^2+16} = \underbrace{\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}}_{\rightsquigarrow e^{-2t}\cos(4t)} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{4}{(s+2)^2+4^2}}_{\rightsquigarrow e^{-2t}\sin(4t)} \quad \text{(Dämpn.satsen)}$$

$$\frac{s}{s^2+4s+20} = (\mathrm{KK}) = \frac{s}{(s+2)^2+16} =$$

Hela bråket ska bero på $s+2$: Omskrivning i täljaren.

Ansats: $s = \alpha(s+2)+\beta; \quad \alpha = 1, \quad \beta = -2$

$$= \frac{s+2-2}{(s+2)^2+16} = \underbrace{\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}}_{\rightsquigarrow e^{-2t}\cos(4t)} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{4}{(s+2)^2+4^2}}_{\rightsquigarrow e^{-2t}\sin(4t)} \quad \text{(Dämpn.satsen)}$$

$$\frac{s}{s^2+4s+20} = (\mathrm{KK}) = \frac{s}{(s+2)^2+16} =$$

Hela bråket ska bero på $s+2$: Omskrivning i täljaren.

$$\text{Ansats:} \quad s = \alpha(s+2)+\beta; \quad \alpha = 1, \quad \beta = -2$$

$$= \frac{s+2-2}{(s+2)^2+16} = \underbrace{\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}}_{\rightsquigarrow e^{-2t}\cos(4t)} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{4}{(s+2)^2+4^2}}_{\rightsquigarrow e^{-2t}\sin(4t)} \qquad \text{(Dämpn.satsen)}$$

Fördröjningssatsen

En funktion $f(t)$ kallas kausal om

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Inom transformteorin är kausala funktioner ofta förekommande.

Antag nu att en kausal funktion $f(t)$ fördröjs 1 tidsenhet.

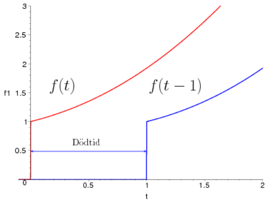
Fördröjd funktion $f(t-1)$

$$\mathcal{L}\{f(t-1)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t-1)\, dt =$$

$$= (u = t-1) = \int_{-1}^\infty e^{-s(u+1)} f(u)\, du =$$

$$= \text{(}f\text{ är kausal)} = e^{-s} \int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du =$$

$$= e^{-s} F(s)$$



Anm: En fördröjning (translatering) på tidssidan motsvaras av en dämpning på frekvenssidan.

Generell formulering av fördröjningssatsen

Sats (Fördröjningssatsen)

Antag att $F(s)$ är Laplacetransformen för en kausal funktion $f(t)$. Om f fördröjs med $T > 0$ tidsenheter blir dess Laplacetransform

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT}\,F(s).$$

Anm: Om några lektioner skall vi, med Heavisides språngfunktion som hjälpmedel, återvända till fördröjningsproblematiken.

Avslutande exempel, Lekt 21

Låt $F(s) =$

- $\dfrac{1}{(s+2)^4}$,
- $\dfrac{s-1}{s^2-2s+5}$.

Bestäm $f(t)$.

Lösningsförslag, punkt 1

$$\text{Om} \quad F(s+2) = \frac{1}{(s+2)^4}, \quad \text{innebär det att} \quad F(s) = \frac{1}{s^4}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^4}\right\} = (\text{Dämpn.sats}) = e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \quad (\text{Tabell})$$

$$= e^{-2t}\,\frac{t^3}{3!}$$

Lösningsförslag, punkt 2

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\} = \text{(KK)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\}$$

Om $F(s-1) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}$, innebär det att $F(s) = \dfrac{s}{s^2+4}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} = \text{(Dämpn.sats)} = e^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \text{(Tabell)}$$

$$= e^t \cos(2t).$$

Lösningsförslag, punkt 2

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\} = \text{(KK)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\}$$

Om $\quad F(s-1) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}, \quad$ innebär det att $\quad F(s) = \dfrac{s}{s^2+4}.$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} = \text{(Dämpn.sats)} = e^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \quad \text{(Tabell)}$$

$$= e^t\cos(2t).$$

Lösningsförslag, punkt 2

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\} = \text{(KK)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\}$$

Om $\quad F(s-1) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}, \quad$ innebär det att $\quad F(s) = \dfrac{s}{s^2+4}.$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} = \text{(Dämpn.sats)} = e^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \quad \text{(Tabell)}$$

$$= e^t\cos(2t).$$

Lösningsförslag, punkt 2

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\} = \text{(KK)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\}$$

$$\text{Om} \quad F(s-1) = \frac{s-1}{(s-1)^2+4}, \quad \text{innebär det att} \quad F(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} = \text{(Dämpn.sats)} = e^t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \quad \text{(Tabell)}$$

$$= e^t \cos(2t).$$

Extra: Om kvadratkomplettering

Utgående ifrån kvadreringsregeln

$$(s+a)^2 = s^2 + 2as + a^2$$

kan vi skriva

$$s^2 + 2as = (s+a)^2 - a^2 \quad \text{(Jämn kvadrat plus/minus en konstant)}$$

Vi genomför en s.k. kvadratkomplettering.

Exempel

Kvadratkomplettera $s^2 + 4s + 3$.

$$s^2 + 4s + 3 = (s + a)^2 + b \quad \text{(Kvadraten kompletteras)}$$

$$s^2 + \mathbf{4}s + 3 = s^2 + \mathbf{2a}s + a^2 + b \quad \text{(Leder till ett ekvationssystem)}$$

$$\begin{cases} 2a = 4 & \text{(Koeff. för } s\text{)} \\ a^2 + b = 3 & \text{(Konstanter)} \end{cases}$$

Vi har att $a = 2$, $b = 3 - a^2$=-1, dvs. $\underline{s^2 + 4s + 3 = (s + 2)^2 - 1}$.

Läs (och lös) på egen hand

Kvadratkomplettera $3s^2 - 9s + 6$.

Lösningsförslagsförslag (tjuvkika inte)

$$3s^2 - 9s + 6 = 3(s^2 - 3s + 2) \quad \text{(Alltid koeff. 1 framför } s^2\text{)}$$
$$s^2 - 3s + 2 = (s+a)^2 + b$$
$$s^2 - 3s + 2 = s^2 + 2as + a^2 + b$$

$$\begin{cases} 2a &= -3 \quad (a = -3/2) \\ a^2 + b &= 2 \quad (b = 2 - a^2 = -1/4) \end{cases}$$

Svar: $3s^2 - 9s + 6 = 3\left(\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = 3\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}.$

Struktur

Handpåläggning

Handpåläggning är en teknik som ofta används när man har enkla, reella nollställen i den faktoriserade nämnaren.

EXEMPEL på handpåläggning:

Antag $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{A_2}{x+3}$.

A_1 och A_2 skall bestämmas.

För att bestämma A_1 lägg handen på $x-2$ i $\dfrac{x+2}{(x-2)(x+3)}$

och sätt in $x = 2$ (som gör att $x-2$ blir 0) i det resterande uttrycket.

Man får $\left.\dfrac{x+2}{(x-2)(x+3)}\right|_{x=2} = 4/5$ som är värdet på A_1

Analogt får man $A_2 = \left.\dfrac{x+2}{(x-2)(x+3)}\right|_{x=-3} = 1/5$

Låt $F(s) =$

- $\dfrac{s+4}{s^2-5s+6}$.

Bestäm $f(t)$.

Lösningsförslag

$$\frac{s+4}{s^2-5s+6} = \frac{s+4}{(s-3)(s-2)} \quad \text{(Partialbråksansats)}$$

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-2}$$

Handpåläggning: Mult. med $s-3$, sätt därefter $s=3$: $C=7$.

Mult. med $s-2$, sätt därefter $s=2$: $D=-6$.

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{7}{s-3} - \frac{6}{s-2}$$

Lösningsförslag

$$\frac{s+4}{s^2-5s+6} = \frac{s+4}{(s-3)(s-2)} \quad \text{(Partialbråksansats)}$$

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-2}$$

Handpåläggning: Mult. med $s-3$, sätt därefter $s=3$: $\quad C=7.$

Mult. med $s-2$, sätt därefter $s=2$: $\quad D=-6.$

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{7}{s-3} - \frac{6}{s-2}$$

Lösningsförslag

$$\frac{s+4}{s^2-5s+6} = \frac{s+4}{(s-3)(s-2)} \quad \text{(Partialbråksansats)}$$

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-2}$$

Handpåläggning: Mult. med $s-3$, sätt därefter $s=3$: $C=7$.

Mult. med $s-2$, sätt därefter $s=2$: $D=-6$.

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{7}{s-3} - \frac{6}{s-2}$$

Lösningsförslag

$$\frac{s+4}{s^2-5s+6} = \frac{s+4}{(s-3)(s-2)} \quad \text{(Partialbråksansats)}$$

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-2}$$

Handpåläggning: Mult. med $s-3$, sätt därefter $s=3$: $C=7$.

Mult. med $s-2$, sätt därefter $s=2$: $D=-6$.

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{7}{s-3} - \frac{6}{s-2}$$

Lösningsförslag

$$\frac{s+4}{s^2-5s+6} = \frac{s+4}{(s-3)(s-2)} \quad \text{(Partialbråksansats)}$$

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-2}$$

Handpåläggning: Mult. med $s-3$, sätt därefter $s=3$: $C=7$.

Mult. med $s-2$, sätt därefter $s=2$: $D=-6$.

$$\frac{s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{7}{s-3} - \frac{6}{s-2}$$

Forts

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s-3}-\frac{6}{s-2}\right\} = \quad \text{(Linearitet hos } \mathcal{L}^{-1}\text{)}$$

$$= 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \quad \text{(Tabell)}$$

$$= 7e^{3t} - 6e^{2t}.$$

Att knyta ihop säcken...

Det är dags att på allvar börja tillämpa tabell och räkneregler. Vi kommer att märka att det ofta finns olika vägar att gå, beroende på hur mycket man nyttjar eventuella genvägar som vissa räkneregler kan erbjuda.

Under de sista lektionerna tillfogas de sista verktygen i vår omfattande verktygslåda, men redan nu kan vi bemästra en mängd olika problemställningar.

Exempel Bestäm

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2 + e^{3t}\cos 2t + t^2 \sin t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Lösningsförslag

L-transformen linjär: Termvis transformering

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2\} = \mathcal{L}\{4t^2-4t+1\} = 8/s^3 - 4/s^2 + 1/s$$

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\cos 2t\} = (\text{Dämpn}) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} \quad (\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4})$$

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s^2+1}) = \ldots = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Lösningsförslag

L-transformen linjär: Termvis transformering

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2\} = \mathcal{L}\{4t^2 - 4t + 1\} = 8/s^3 - 4/s^2 + 1/s$$

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\cos 2t\} = (\text{Dämpn}) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} \quad (\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4})$$

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s^2+1}) = \ldots = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Lösningsförslag

L-transformen linjär: Termvis transformering

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2\} = \mathcal{L}\{4t^2 - 4t + 1\} = 8/s^3 - 4/s^2 + 1/s$$

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\cos 2t\} = (\text{Dämpn}) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} \quad \left(\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \ldots = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Lösningsförslag

L-transformen linjär: Termvis transformering

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2\} = \mathcal{L}\{4t^2-4t+1\} = 8/s^3 - 4/s^2 + 1/s$$

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\cos 2t\} = (\text{Dämpn}) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} \quad (\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4})$$

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \ldots = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Forts

$$\text{Alt:} \quad \mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \mathcal{L}\{t \underbrace{(t \sin t)}_{g(t)}\}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin t\} = G(s) = (\text{Tab.}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\, g(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}\Big(G(s)\Big) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Sammanställning

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2 + e^{3t}\cos 2t + t^2 \sin t\} = \ldots$$

(Addera samman ovanst. transformer)

Forts

$$\underline{\text{Alt:}} \quad \mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \mathcal{L}\{t\,\underbrace{(t \sin t)}_{g(t)}\}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin t\} = G(s) = (\text{Tab.}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\,g(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}\Big(G(s)\Big) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Sammanställning

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2 + e^{3t}\cos 2t + t^2 \sin t\} = \ldots$$

(Addera samman ovanst. transformer)

Forts

$$\underline{\text{Alt:}} \quad \mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \mathcal{L}\{t\,\underbrace{(t \sin t)}_{g(t)}\}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin t\} = G(s) = (\text{Tab.}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\,g(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}\Big(G(s)\Big) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Sammanställning

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2 + e^{3t}\cos 2t + t^2 \sin t\} = \ldots$$

(Addera samman ovanst. transformer)

Forts

$$\underline{\text{Alt:}} \quad \mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \mathcal{L}\{t \underbrace{(t \sin t)}_{g(t)}\}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin t\} = G(s) = (\text{Tab.}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\, g(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}\Big(G(s)\Big) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Sammanställning

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2 + e^{3t}\cos 2t + t^2 \sin t\} = \dots$$

(Addera samman ovanst. transformer)

Forts

$$\underline{\text{Alt:}} \quad \mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \mathcal{L}\{t\,\underbrace{(t \sin t)}_{g(t)}\}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin t\} = G(s) = (\text{Tab.}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\,g(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}\Big(G(s)\Big) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Sammanställning

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2 + e^{3t}\cos 2t + t^2 \sin t\} = \ldots$$

(Addera samman ovanst. transformer)

Forts

$$\underline{\text{Alt:}} \quad \mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \mathcal{L}\{t \underbrace{(t \sin t)}_{g(t)}\}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin t\} = G(s) = (\text{Tab.}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\, g(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}\Big(G(s)\Big) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Sammanställning

$$\mathcal{L}\{(2t-1)^2 + e^{3t}\cos 2t + t^2 \sin t\} = \dots$$

(Addera samman ovanst. transformer)

Avslutande exempel – omfattande

Bestäm en funktion $f(t)$ med Laplacetransformen

$$F(s) = \frac{6s^3 + 11s^2 + 4s - 13}{(s-1)^2(s^2+2s+5)}$$

Lösningsförslag

$$(\text{Part.bråk}) = \ldots = \overbrace{\frac{5}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}}^{\text{Tabell}} + \frac{s+7}{(s+1)^2+4}$$

$$\frac{s+7}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1+6}{(s+1)^2+4} \quad (\text{passningsräkning i sista bråket})$$

Sista bråket

$$\frac{s+1+6}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{6}{(s+1)^2+4} \quad (s+1 \leftrightarrow s \text{ i tabell})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \cos 2t, \quad 3\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = 3\sin 2t$$

(Fördröjn. sats + sammanställning)

$$f(t) = 5e^t + te^t + e^{-t}(\cos 2t + 3\sin 2t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Sista bråket

$$\frac{s+1+6}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{6}{(s+1)^2+4} \quad (s+1 \leftrightarrow s \text{ i tabell})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \cos 2t, \quad 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = 3\sin 2t$$

(Fördröjn. sats + sammanställning)

$$f(t) = 5e^t + te^t + e^{-t}(\cos 2t + 3\sin 2t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Sista bråket

$$\frac{s+1+6}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{6}{(s+1)^2+4} \quad (s+1 \leftrightarrow s \text{ i tabell})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \cos 2t, \quad 3\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = 3\sin 2t$$

(Fördröjn. sats + sammanställning)

$$f(t) = 5e^t + te^t + e^{-t}(\cos 2t + 3\sin 2t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Sista bråket

$$\frac{s+1+6}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{6}{(s+1)^2+4} \quad (s+1 \leftrightarrow s \text{ i tabell})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \cos 2t, \quad 3\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = 3\sin 2t$$

(Fördröjn. sats + sammanställning)

$$f(t) = 5e^t + te^t + e^{-t}(\cos 2t + 3\sin 2t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$