Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 24-25

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

2 mars 2016

Lekt 23

Bestäm $y(t)$ för $t \geqslant 0$ ur BV-problemet

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \sin(2t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Struktur

1. **Lektion 24: Steg-, ramp- och impulsfunktioner**

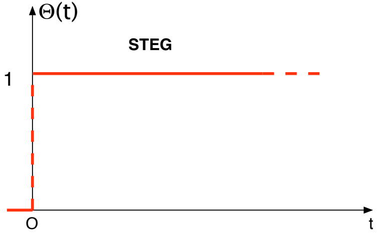
2. Lektion 25: Fördröjd funktion

Steg-, ramp- och impulsfunktioner

I det praktiska räknandet förekommer några i sammanhanget viktiga funktioner. Vi presenterar allra först Heavisides stegfunktion $\Theta(t)$.

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$\Theta(t)$ används som modell för s.k. transienta förlopp (t ex in- och urkoppling inom elläran.



Exempel: Fyrkantspuls

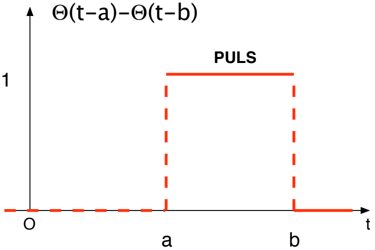
Fyrkantspulsen

$$f(t) = \begin{cases} 1, & a < t < b \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Med Heavisides språngfunktion kan fyrkantspulsen skrivas

$$f(t) = \Theta(t-a) - \Theta(t-b)$$

Vi gör en s.k. *avskärning*.



Anm: En fyrkantspuls med amplitud A skrivs $A(\Theta(t-a) - \Theta(t-b))$.

Enhetsramp

Funktionen

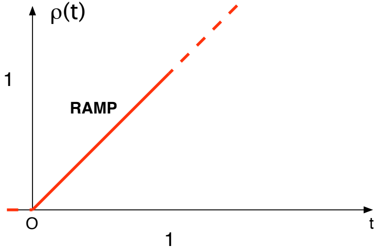
$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

kallas (enhets-)ramp. Rampfunktionen används ofta i reglertekniska sammanhang.

Anm: Mellan ramp ρ och steg Θ gäller sambanden

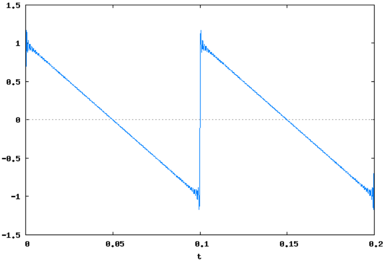
$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{t} \Theta(\tau)\, d\tau$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \Theta(t)$$



Sågtandsfunktioner

Med rampfunktionen kan man konstruera exempelvis sågtandsfunktioner, en vanlig familj av periodiska funktioner inom den analoga elektroniken.

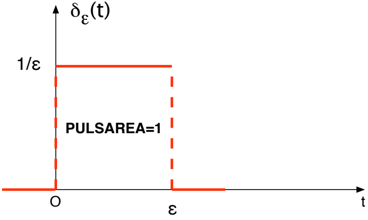


Enhetsimpulsen

Funktionen

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & 0 < t < \epsilon \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

har liten bredd men stor amplitud, under konstant pulsarea=1.



Ju mindre ϵ, desto större amplitud. Vad händer då $\epsilon \to 0$?

Impuls: Diracs δ-funktion

Funktionen

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$$

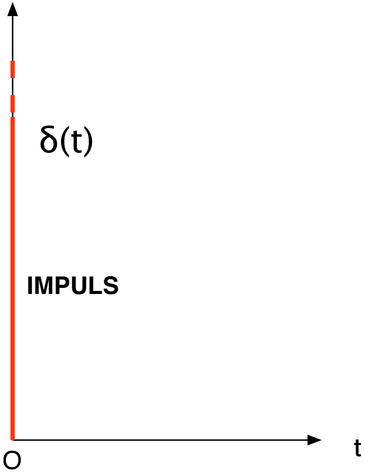
kallas Diracs deltafunktion eller (enhets-)impuls. Denna s.k. distribution modellerar snabba förlopp (t ex stötförlopp i mekaniken).

Anm: Märkliga samband:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$\delta(t)$ kan inte beskrivas som en funktion i klassisk mening.

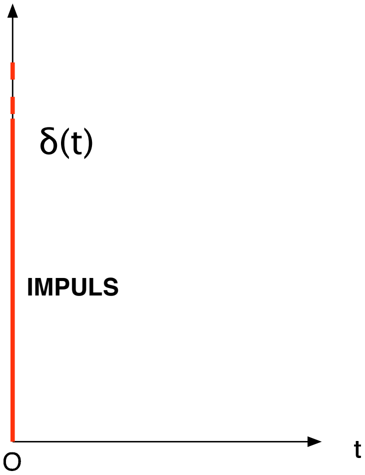


Anm: Samband mellan steg och impuls

Mellan steg Θ och impuls δ gäller sambanden

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \delta(t)$$



Styckvis definierade funktioner

Ofta stöter man på funktioner i form av olika uttryck på olika intervall.

Exempel Låt den kausala funktionen $f(t)$ definieras av

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leqslant t < 4 \\ \cos t, & 4 \leqslant t < 6 \\ \sqrt{t}, & t \geqslant 6 \end{cases}$$

Uttryck $f(t)$ med hjälp av $\Theta(t)$.

Lösningsförslag: Alternativ 1

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leqslant t < 4 \\ \cos t, & 4 \leqslant t < 6 \\ \sqrt{t}, & t \geqslant 6 \end{cases}$$

För varje delintervall multiplicerar vi $f(t)$ med avskärningen (dvs funktion som är 1 på aktuellt intervall, annars 0). Därefter adderar vi termerna.

INTERVALL	*AVSKÄRNING*	$f(t)$
$[0, 4)$	$\Theta(t) - \Theta(t-4)$	t^2
$[4, 6)$	$\Theta(t-4) - \Theta(t-6)$	$\cos t$
$[6, \infty)$	$\Theta(t-6)$	$\sqrt{t}$

Forts

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-4))\, t^2 +$$
$$+(\Theta(t-4) - \Theta(t-6))\, \cos t + \Theta(t-6)\sqrt{t} =$$

Forts

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-4))\, t^2 +$$
$$+(\Theta(t-4) - \Theta(t-6))\, \cos t + \Theta(t-6)\, \sqrt{t} =$$

$$= t^2\, \Theta(t) + \Theta(t-4)\, (\cos t - t^2) + \Theta(t-6)\, (\sqrt{t} - \cos t)$$

Alternativ 2

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leqslant t < 4 \\ \cos t, & 4 \leqslant t < 6 \\ \sqrt{t}, & t \geqslant 6 \end{cases}$$

I varje brytpunkt

- lägger vi till ny och drar bort gammal funktion,
- samt multiplicerar med lämplig fördröjd Heavisidefunktion.

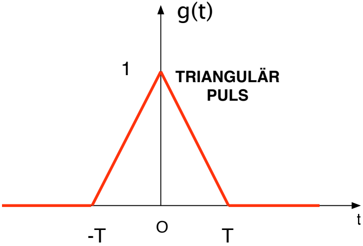
$$f(t) = \underbrace{t^2\,\Theta(t)}_{f \text{ är kausal}} + \Theta(t-4)\,(\cos t - t^2) + \Theta(t-6)\,(\sqrt{t} - \cos t)$$

Triangulär puls

Funktionen

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < -T \\ \dfrac{1}{T}t + 1, & -T \leqslant t < 0 \\ -\dfrac{1}{T}t + 1, & 0 \leqslant t < T \\ 0, & t \geqslant T \end{cases}$$

beskriver en triangulär puls med sin spets i $(0, 1)$.



Med hjälp av Heavisides stegfunktion kan $g(t)$ beskrivas analytiskt. Vi använder alternativet med avskärning. (Övning: Använd alternativt brytpunkts-metoden)

Lösningsförslag: Avskärning

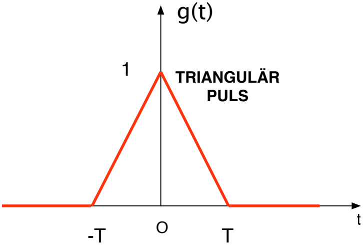
$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < -T \\ \dfrac{1}{T}t + 1, & -T \leqslant t < 0 \\ -\dfrac{1}{T}t + 1, & 0 \leqslant t < T \\ 0, & t \geqslant T \end{cases}$$

INTERVALL	*AVSKÄRNING*	$f(t)$
$(-\infty, -T)$	$\Theta(t+T)$	0
$[-T, 0)$	$\Theta(t+T) - \Theta(t)$	$\dfrac{1}{T}t + 1$
$[0, T)$	$\Theta(t) - \Theta(t-T)$	$-\dfrac{1}{T}t + 1$
(T, ∞)	$\Theta(t-T)$	0

Beskrivning av triangelpulsen

Triangelpulsen

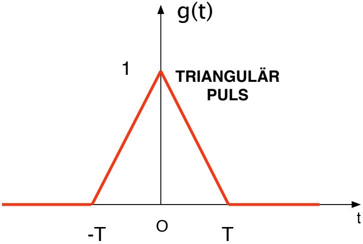
$$g(t) = (\Theta(t+T) - \Theta(t))\,(\frac{1}{T}\,t+1)+$$
$$+(\Theta(t) - \Theta(t-T))\,(-\frac{1}{T}\,t+1) =$$



Beskrivning av triangelpulsen

Triangelpulsen

$$g(t) = (\Theta(t+T) - \Theta(t))\,(\frac{1}{T}\,t + 1) +$$
$$+(\Theta(t) - \Theta(t-T))\,(-\frac{1}{T}\,t + 1) =$$



$$= \left(\frac{1}{T}\,t + 1\right) \cdot \Theta(t+T) - \frac{2t}{T} \cdot \Theta(t) + \left(\frac{1}{T}\,t - 1\right) \cdot \Theta(t-T)$$

Laplacetransform av ”de tre”

Heavisides stegfunktion

$$\mathcal{L}\{\Theta(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

Rampfunktionen

$$\mathcal{L}\{\rho(t)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad \left(\text{Alt. } \mathcal{L}\{t \cdot 1\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)\right)$$

Diracs impulsfunktion

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (\text{Läs själv. Sista stordiorna}\ldots)$$

Avslutande exempel

Vi rundar av denna innehållsrika lektion med ett BV-problem där HL är en styckvis definierad funktion.

Exempel Lös BV-problemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 2y &= f(t), \\ y(0) &= 0 \end{cases} \qquad \text{med} \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 1 \\ 0, & t \geqslant 1 \end{cases}$$

Fördröjning

Vi ska i detta exempel åberopa fördröjningssatsen från Lekt 21 , men i en lite mer generell form:

Sats (Fördröjningssatsen, alternativ)

För en funktion $f(t)$ med Laplacetransformen $F(s)$ gäller: Den funktion som uppstår genom fördröjning $T > 0$ tidsenheter har Laplacetransformen

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\Theta(t-T)\} = e^{-sT} F(s).$$

Vi återkommer under nästa lektion med utförligare genomgång av fördröjningssatsen.

Lösningsförslag

$$Y = \mathcal{L}[y]$$

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-1))\,t = t\,\Theta(t) - t\,\Theta(t-1) =$$

Ordna med rätt beroende $(\Theta(t-1))$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1+1)\,\Theta(t-1)$$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - \Theta(t-1)$$

L-transf. med fördröjningssatsen

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}[y' + 2y] = sY + 2Y$$

$$sY + 2Y = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Lösningsförslag

$$Y = \mathcal{L}[y]$$

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-1))\,t = t\,\Theta(t) - t\,\Theta(t-1) =$$

Ordna med rätt beroende $(\Theta(t-1))$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1+1)\,\Theta(t-1)$$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - \Theta(t-1)$$

L-transf. med fördröjningssatsen

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}[y' + 2y] = sY + 2Y$$

$$sY + 2Y = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Lösningsförslag

$$Y = \mathcal{L}[y]$$

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-1))\,t = t\,\Theta(t) - t\,\Theta(t-1) =$$

Ordna med rätt beroende $(\Theta(t-1))$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1+1)\,\Theta(t-1)$$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - \Theta(t-1)$$

L-transf. med fördröjningssatsen

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}[y' + 2y] = sY + 2Y$$

$$sY + 2Y = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Lösningsförslag

$$Y = \mathcal{L}[y]$$

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-1))\, t = t\,\Theta(t) - t\,\Theta(t-1) =$$

Ordna med rätt beroende $(\Theta(t-1))$

$$= t\,\Theta(t) - (t - 1 + 1)\,\Theta(t-1)$$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - \Theta(t-1)$$

L-transf. med fördröjningssatsen

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}[y' + 2y] = sY + 2Y$$

$$sY + 2Y = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Lösningsförslag

$$Y = \mathcal{L}[y]$$

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-1))\, t = t\,\Theta(t) - t\,\Theta(t-1) =$$

Ordna med rätt beroende $(\Theta(t-1))$

$$= t\,\Theta(t) - (t - 1 + 1)\,\Theta(t-1)$$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - \Theta(t-1)$$

L-transf. med fördröjningssatsen

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}[y' + 2y] = sY + 2Y$$

$$sY + 2Y = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Lösningsförslag

$$Y = \mathcal{L}[y]$$

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-1))\,t = t\,\Theta(t) - t\,\Theta(t-1) =$$

Ordna med rätt beroende $(\Theta(t-1))$

$$= t\,\Theta(t) - (t - 1 + 1)\,\Theta(t-1)$$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - \Theta(t-1)$$

L-transf. med fördröjningssatsen

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}[y' + 2y] = sY + 2Y$$

$$sY + 2Y = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Lösningsförslag

$$Y = \mathcal{L}[y]$$

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-1))\,t = t\,\Theta(t) - t\,\Theta(t-1) =$$

Ordna med rätt beroende $(\Theta(t-1))$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1+1)\,\Theta(t-1)$$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - \Theta(t-1)$$

L-transf. med fördröjningssatsen

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}[y' + 2y] = sY + 2Y$$

$$sY + 2Y = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Lösningsförslag

$$Y = \mathcal{L}[y]$$

$$f(t) = (\Theta(t) - \Theta(t-1))\, t = t\,\Theta(t) - t\,\Theta(t-1) =$$

Ordna med rätt beroende $(\Theta(t-1))$

$$= t\,\Theta(t) - (t - 1 + 1)\,\Theta(t-1)$$

$$= t\,\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - \Theta(t-1)$$

L-transf. med fördröjningssatsen

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}[y' + 2y] = sY + 2Y$$

$$sY + 2Y = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Forts.

$$Y(s+2) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{s+1}{s^2}\right)$$

$$Y = \frac{1}{s^2(s+2)} - e^{-s}\left(\frac{s+1}{s^2(s+2)}\right) \quad \text{(Part.bråk)}$$

$$Y = -\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)} - e^{-s}\left(\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4(s+2)}\right)$$

Inverstransf. med fördröjningssatsen och tabell

Svar: $y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} - \Theta(t-1)\left(\frac{1}{4} + \frac{t-1}{2} - \frac{e^{-2(t-1)}}{4}\right), t \in \mathbb{R}_+$

Forts.

$$Y(s+2) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{s+1}{s^2}\right)$$

$$Y = \frac{1}{s^2(s+2)} - e^{-s}\left(\frac{s+1}{s^2(s+2)}\right)$$ (Part.bråk)

$$Y = -\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)} - e^{-s}\left(\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4(s+2)}\right)$$

Inverstransf. med fördröjningssatsen och tabell

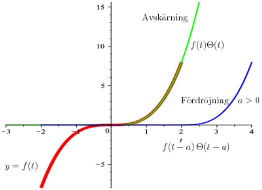
Svar: $y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} - \Theta(t-1)\left(\frac{1}{4} + \frac{t-1}{2} - \frac{e^{-2(t-1)}}{4}\right), t \in \mathbb{R}_+$

Struktur

Fördröjd funktion

Under en tidigare lektion diskuterade vi något begreppet fördröjning av kausala funktioner. Låt oss fördjupa detta en aning.

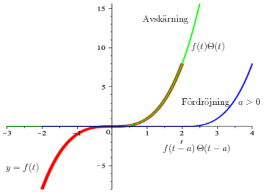
Sedan Matematik I vet vi att grafen till $y = f(t-a)$, $a > 0$, är grafen till $y = f(t), t \geqslant 0$ förskjuten a längdenheter till höger längs t-axeln. Låt oss göra en avskärning genom funktionen $f(t)\,\Theta(t)$. Då får vi en kausal funktion (grön graf). Denna graf sammanfaller med grafen till $f(t), t \geqslant 0$, men är 0 för $t < 0$.



Fördröjd funktion

Under en tidigare lektion diskuterade vi något begreppet fördröjning av kausala funktioner. Låt oss fördjupa detta en aning.

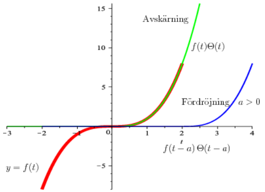
Sedan Matematik I vet vi att grafen till $y = f(t-a)$, $a > 0$, är grafen till $y = f(t), t \geqslant 0$ förskjuten a längdenheter till höger längs t-axeln. Låt oss göra en avskärning genom funktionen $f(t)\,\Theta(t)$. Då får vi en kausal funktion (grön graf). Denna graf sammanfaller med grafen till $f(t), t \geqslant 0$, men är 0 för $t < 0$.



Fördröjd funktion

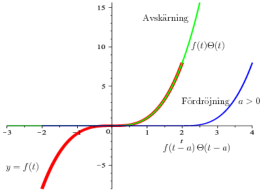
Under en tidigare lektion diskuterade vi något begreppet fördröjning av kausala funktioner. Låt oss fördjupa detta en aning.

Sedan Matematik I vet vi att grafen till $y = f(t-a)$, $a > 0$, är grafen till $y = f(t), t \geqslant 0$ förskjuten a längdenheter till höger längs t-axeln. Låt oss göra en avskärning genom funktionen $f(t)\,\Theta(t)$. Då får vi en kausal funktion (grön graf). Denna graf sammanfaller med grafen till $f(t), t \geqslant 0$, men är 0 för $t < 0$.



Låt oss fördröja denna kausala funktion genom $f(t-a)\,\Theta(t-a)$ (blå graf). Denna graf sammanfaller med grafen till $f(t-a), t \geqslant a$, men är 0 för $t < a$.

Det är dags att på nytt formulera fördröjningssatsen med hjälp av Heavisides stegfunktion.



Fördröjningssatsen

Sats

Om $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *och* $a > 0$ *gäller*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,\Theta(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Speciellt: Om $f(t)$ *är kausal, är* $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$.

Exempel

$$\mathcal{L}\left\{\Theta(t-a)\right\} = \mathcal{L}\left\{1 \cdot \Theta(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\rho(t-a)\Theta(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{t\right\} = e^{-as}\frac{1}{s^2} \quad \text{(Rampens L-transf.)}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t-2)^3\Theta(t-2)\right\} = e^{-2s}\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = e^{-2s}\frac{3!}{s^4}$$

Exempel

$$\mathcal{L}\left\{\Theta(t-a)\right\} = \mathcal{L}\left\{1 \cdot \Theta(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\rho(t-a)\Theta(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{t\right\} = e^{-as}\frac{1}{s^2} \quad \text{(Rampens L-transf.)}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t-2)^3\Theta(t-2)\right\} = e^{-2s}\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = e^{-2s}\frac{3!}{s^4}$$

Exempel

$$\mathcal{L}\left\{\Theta(t-a)\right\} = \mathcal{L}\left\{1 \cdot \Theta(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\rho(t-a)\Theta(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{t\right\} = e^{-as}\frac{1}{s^2} \quad \text{(Rampens L-transf.)}$$

$$\mathcal{L}\left\{(t-2)^3\Theta(t-2)\right\} = e^{-2s}\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = e^{-2s}\frac{3!}{s^4}$$

Exempel: Inverstransformering av fördröjd funktion

Givet

$$F(s) = \frac{e^{-6s}}{s^2 + 8s + 15}$$

Bestäm inverstransformen av $F(s)$.

Lösningsförslag

Metod: Studera $G(s) = F(s)$ **utan** exponentialterm:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 15} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+5}\right) \quad \text{(Partialbråk)}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2}\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right)$$

Vi multiplicerar $G(s)$ med e^{-6s}: $e^{-6s}G(s) = F(s)$,

dvs en tidsfördröjning med 6 tidsenheter. Fördröjningssatsen:

$$f(t) = \Theta(t-6) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{-3(t-6)} - e^{-5(t-6)}\right)$$

Lösningsförslag

Metod: Studera $G(s) = F(s)$ **utan** exponentialterm:

$$G(s) = \frac{1}{s^2+8s+15} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+5}\right) \quad \text{(Partialbråk)}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2}\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right)$$

Vi multiplicerar $G(s)$ med e^{-6s}: $e^{-6s}G(s) = F(s)$,

dvs en tidsfördröjning med 6 tidsenheter. Fördröjningssatsen:

$$f(t) = \Theta(t-6)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{-3(t-6)} - e^{-5(t-6)}\right)$$

Avslutande exempel

Laplacetransformera

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \sin \pi t, & 1 \leqslant t < 2 \\ t^2 - 4, & t \geqslant 2 \end{cases}$$

Lösningsförslag

$$f(t) = \Theta(t-1)\,(\sin \pi t) + \Theta(t-2)\,(t^2 - 4 - \sin \pi t) \quad \text{(Övning)}$$

Uttryck (a): $\sin \pi t$ i termer av $t-1$ samt

(b): $t^2 - 4 - \sin \pi t$ i termer av $t-2$.

$$\text{(a)} \quad \Theta(t-1)\,(\sin \pi t)$$

$$t = a(t-1) + b, \quad a = b = 1,$$

$$\sin \pi t = \sin \pi (t - 1 + 1) = -\sin \pi (t-1) \quad \text{(Eller hur?)}$$

Lösningsförslag

$$f(t) = \Theta(t-1)\,(\sin \pi t) + \Theta(t-2)\,(t^2 - 4 - \sin \pi t) \quad \text{(Övning)}$$

Uttryck (a): $\sin \pi t$ i termer av $t-1$ samt
(b): $t^2 - 4 - \sin \pi t$ i termer av $t-2$.

$$\text{(a)} \quad \Theta(t-1)\,(\sin \pi t)$$

$$t = a(t-1) + b, \quad a = b = 1,$$

$$\sin \pi t = \sin \pi(t-1+1) = -\sin \pi(t-1) \quad \text{(Eller hur?)}$$

Lösningsförslag

$$f(t) = \Theta(t-1)\,(\sin \pi t) + \Theta(t-2)\,(t^2 - 4 - \sin \pi t) \quad \text{(Övning)}$$

Uttryck (a): $\sin \pi t$ i termer av $t-1$ samt
(b): $t^2 - 4 - \sin \pi t$ i termer av $t-2$.

$$\text{(a)} \quad \Theta(t-1)\,(\sin \pi t)$$

$$t = a(t-1) + b, \quad a = b = 1,$$

$$\sin \pi t = \sin \pi(t-1+1) = -\sin \pi(t-1) \quad \text{(Eller hur?)}$$

Lösningsförslag

$$f(t) = \Theta(t-1)\,(\sin \pi t) + \Theta(t-2)\,(t^2 - 4 - \sin \pi t) \quad \text{(Övning)}$$

Uttryck (a): $\sin \pi t$ i termer av $t-1$ samt
(b): $t^2 - 4 - \sin \pi t$ i termer av $t-2$.

$$\text{(a)} \quad \Theta(t-1)\,(\sin \pi t)$$

$$t = a(t-1) + b, \quad a = b = 1,$$

$$\sin \pi t = \sin \pi(t-1+1) = -\sin \pi(t-1) \quad \text{(Eller hur?)}$$

Uttryck $t^2 - 4 - \sin \pi t$ i termer av $t - 2$

(b) $\Theta(t-2)\,(t^2 - 4 - \sin \pi t)$

$$t^2 - 4 = a(t-2)^2 + b(t-2) + c, \quad a = 1, b = 4, c = 0,$$
$$t^2 - 4 = (t-2)^2 + 4(t-2)$$

$$t = a(t-2) + b, \quad a = 1, b = 2,$$
$$\sin \pi t = \sin \pi(t - 2 + 2) = \sin \pi(t-2) \quad \text{(Eller hur?)}$$

Uttryck $t^2 - 4 - \sin \pi t$ i termer av $t - 2$

$$\text{(b)} \quad \Theta(t-2)\,(t^2 - 4 - \sin \pi t)$$

$$t^2 - 4 = a(t-2)^2 + b(t-2) + c, \quad a = 1, b = 4, c = 0,$$
$$t^2 - 4 = (t-2)^2 + 4(t-2)$$

$$t = a(t-2) + b, \quad a = 1, b = 2,$$
$$\sin \pi t = \sin \pi(t - 2 + 2) = \sin \pi(t-2) \quad \text{(Eller hur?)}$$

Uttryck $t^2 - 4 - \sin \pi t$ i termer av $t - 2$

$$\text{(b)} \quad \Theta(t-2)\,(t^2 - 4 - \sin \pi t)$$

$$t^2 - 4 = a(t-2)^2 + b(t-2) + c, \quad a = 1, b = 4, c = 0,$$
$$t^2 - 4 = (t-2)^2 + 4(t-2)$$

$$t = a(t-2) + b, \quad a = 1, b = 2,$$
$$\sin \pi t = \sin \pi(t - 2 + 2) = \sin \pi(t-2) \quad \text{(Eller hur?)}$$

Sammanfattning

$$f(t) = \Theta(t-1)\,(\sin \pi t) + \Theta(t-2)\,(t^2 - 4 - \sin \pi t) =$$

$$\Theta(t-1)\left(-\sin \pi(t-1)\right) + \Theta(t-2)\left((t-2)^2 + 4(t-2) - \sin \pi(t-2)\right)$$

Fördröjningssatsen

$$F(s) = -e^{-s}\left(\underbrace{\frac{\pi}{s^2+\pi^2}}_{\mathcal{L}[\sin \pi t]}\right) + e^{-2s}\left(\underbrace{\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{\pi}{s^2+\pi^2}}_{\mathcal{L}[t^2, 4t, \sin \pi t]}\right)$$

Läs på egen hand: Laplacetransform av Diracs impulsfunktion

Först betraktar vi fyrkantspulsen $f(t) = a(\Theta(t) - \Theta(t-T))$. Dess Laplacetransform:

$$\mathcal{L}\left\{a(\Theta(t) - \Theta(t-T))\right\} = \int_0^T a\, e^{-st}\, dt = a\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

Eftersom pulsarean $aT = 1$ för en enhetsimpuls, kan vi Laplacetransformera $\delta(t)$ vid $t = 0$ genom att nyttja fyrkantspulsens Laplacetransform.

Sätt $aT = 1$, Taylorutveckla och gör gränsövergång.

Laplacetransform av impuls som ett gränsvärde av L-transf. för en fyrkantspuls

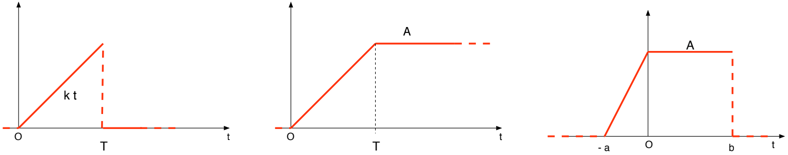
$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = \lim_{T\to 0} \frac{1-e^{-sT}}{sT} =$$

$$= \lim_{T\to 0} \frac{1-\left(1-sT+\frac{1}{2}s^2T^2+\mathcal{O}(T^3)\right)}{sT} =$$

$$= \lim_{T\to 0}\left(1-\frac{1}{2}sT+\mathcal{O}(T^2)\right) = 1.$$

Egen övning

Beskriv nedanstående funktioner med hjälp av stegfunktioner.



Facit på nästa stordia.

Facit–föregående övning

1. $f(t) = kt(\Theta(t) - \Theta(t - T))$
2. $f(t) = \Theta(t)(At/T) + \Theta(t - T)(A - At/T)$
3. $f(t) = \Theta(t + a)(A + At/a) + \Theta(t)(-At/a) + \Theta(t - b)(-A)$