Matematik III M0039M, Lp 3 2016

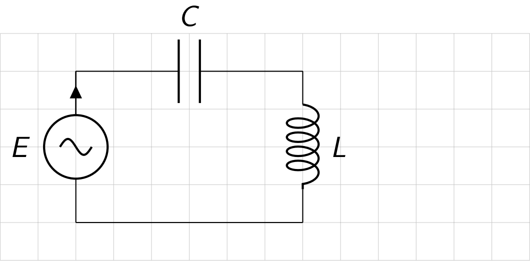
Lektion 26

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

4 mars 2016

Lekt 25



Spänningen E i en elektrisk LC-krets ges av

$$E = \begin{cases} 25t, & 0 \leqslant t < 2, \\ 50, & t \geqslant 2 \end{cases}$$

Bestäm strömmen i kretsen om både ström $i(t)$ och laddning $q(t)$ är noll för $t = 0$, dvs lös ekvationerna

$$\frac{di}{dt} + 16q = E, \qquad i = \frac{dq}{dt}, \qquad q(0) = 0, \quad i(0) = \dot{q}(0) = 0.$$

Lösningsförslag

Diffekvation i laddningen q:

$$\ddot{q} + 16q = E$$

$$Q = \mathcal{L}[q]$$

$$E = (\Theta(t) - \Theta(t-2))\,25t + 50\,\Theta(t-2) =$$

$$= \Theta(t)25t - 25\Theta(t-2)(t-2)$$

Lösningsförslag

Diffekvation i laddningen q:

$$\ddot{q} + 16q = E$$

$$Q = \mathcal{L}[q]$$

$$E = (\Theta(t) - \Theta(t-2))\,25t + 50\,\Theta(t-2) =$$

$$= \Theta(t)25t - 25\Theta(t-2)(t-2)$$

L-transf. i H.L. med fördröjningssatsen

$$\mathcal{L}[E] = \frac{25}{s^2} - e^{-2s}\frac{25}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[\ddot{q} + 16q] = s^2 Q + 16Q$$

$$Q(s^2 + 16) = \frac{25}{s^2} - e^{-2s}\frac{25}{s^2}$$

Forts.

$$Q = \frac{25}{s^2(s^2+16)} - e^{-2s}\left(\frac{25}{s^2(s^2+16)}\right) \quad \text{(Part.bråk)}$$

Forts.

$$Q = \frac{25}{s^2(s^2+16)} - e^{-2s}\left(\frac{25}{s^2(s^2+16)}\right) \quad \text{(Part.bråk)}$$

$$Q = \frac{25}{16\cdot s^2} - \frac{25}{16\cdot(s^2+16)} - e^{-2s}\left(\frac{25}{16\cdot s^2} - \frac{25}{16\cdot(s^2+16)}\right)$$

Inverstransf. med fördröjningssatsen och tabell

$$q(t) = \frac{25t}{16} - \frac{25\sin(4t)}{64} - \Theta(t-2)\left(\frac{25(t-2)}{16} - \frac{25\sin(4(t-2))}{64}\right), t \in \mathbb{R}_+$$

Avslutningsvis

$$i(t) = \dot{q} = \frac{25}{16} - \frac{25\cos(4t)}{16} - \Theta(t-2)\left(\frac{25}{16} - \frac{25\cos(4(t-2))}{16}\right)$$

System av differentialekvationer. Cramers regel

För att lösa ett system av differentialekvationer kombinerar vi redan kända metoder med ett maskineri från den linjära algebran (läs: Gausselimination).

Låt oss betrakta en alternativ lösningsmetod, som bygger på determinanter.

Cramers regel

Låt $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vara ett linjärt ekvationssystem, och låt vidare A vara en inverterbar $n \times n$-matris.
Vi skriver A som en radmatris:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Sats (Cramers regel)

Antag att $\mathrm{A}_i(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ är matrisen vi erhåller då vi ersätter kolonn $\mathbf{a}_i$ i A med vektorn $\mathbf{b}$. Då har systemet $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ den entydiga lösningen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, så att

$$x_i = \frac{\det \mathrm{A}_i(\mathbf{b})}{\det \mathrm{A}}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -5x + 4y = 8 \end{cases}$$

Lösningsförslag

Vi betraktar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Vi får snabbt att $\det A = 2$, eller hur? Därmed är A inverterbar, så vi kan nyttja Cramers regel.

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \dots & -2 \\ \dots & 4 \end{bmatrix} \quad \text{respektive} \quad A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3 & \dots \\ -5 & \dots \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{40}{2} = 20, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{54}{2} = 27.$$

System av differentialekvationer

Vi ska lösa systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + 5y = e^{-t} \\ \dfrac{dy}{dt} - 3y - 5x = \quad 0 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = y(0) = 0$.

Lösningsförslag

Vi transformerar respektive ekvation.

$$\mathcal{L}\left\{x' + 3x + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\}$$
$$\mathcal{L}\left\{y' - 3y - 5x\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\}$$
$$(X(s) = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}, Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\})$$

Lösningsförslag

Vi transformerar respektive ekvation.

$$\mathcal{L}\left\{x' + 3x + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\}$$
$$\mathcal{L}\left\{y' - 3y - 5x\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\}$$
$$(X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\})$$

$$(s+3)X + 5Y = \frac{1}{s+1}$$
$$-5X + (s-3)Y = 0 \quad \left(\text{Matrisform}\right)$$

$$\begin{bmatrix} s+3 & 5 \\ -5 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cramers regel:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & 5 \\ 0 & s-3 \end{vmatrix}}{s^2+16} = \frac{s-3}{(s^2+16)(s+1)},$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s+3 & \frac{1}{s+1} \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{s^2+16} = \frac{5}{(s^2+16)(s+1)}.$$

Cramers regel:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & 5 \\ 0 & s-3 \end{vmatrix}}{s^2+16} = \frac{s-3}{(s^2+16)(s+1)},$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s+3 & \frac{1}{s+1} \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{s^2+16} = \frac{5}{(s^2+16)(s+1)}.$$

$$X(s) = \frac{4\cdot s+13}{17\cdot(s^2+16)} - \frac{4}{17\cdot(s+1)} \quad \text{(Partbråk)}$$

$$x(t) = \frac{4}{17}\cos(4t) + \frac{13}{68}\sin(4t) - \frac{4}{17}\cdot e^{-t},$$

efter diverse passningsräkningar och inverstransformering. Analogt får vi för $y(t)$:

$$Y(s) = \frac{5}{17 \cdot (s+1)} - \frac{5 \cdot s - 5}{17 \cdot (s^2 + 16)}$$

$$y(t) = -\frac{5}{17}\cos(4t) + \frac{5}{68}\sin(4t) + \frac{5}{17} \cdot e^{-t}.$$

Avslutande exempel

Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 2y = 3 \\ \dfrac{dy}{dt} - 2x + y = e^{2t} \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = 2, y(0) = -1$.

Svar:

$$x(t) = \frac{2 \cdot e^{2\cdot t}}{5} + \frac{3 \cdot e^{t}}{2} + \frac{11 \cdot e^{-3\cdot t}}{10} - 1$$
$$y(t) = \frac{3 \cdot e^{2\cdot t}}{5} + \frac{3 \cdot e^{t}}{2} - \frac{11 \cdot e^{-3\cdot t}}{10} - 2$$

På egen hand

Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 3y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x - y = e^{-t} \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = y(0) = 0$.

Svar:

$$x(t) = \frac{1}{3\sqrt{8}}\sin(\sqrt{8}\cdot t) - \frac{1}{3}\cos(\sqrt{8}\cdot t) + \frac{1}{3}e^{-t}$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{8}}\sin(\sqrt{8}\cdot t)$$

På egen hand

Lös med Cramers regel ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y + 7z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$