Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 9

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

1 februari 2016

Lekt 8

- En flaska rödvin hämtas upp från restaurangens vinkällare, vilken håller temperaturen 10°. Man avser att lufta vinet och placerar därför buteljen i ett rum med temperaturen 23°.
  Efter 10 minuter har vinets temperatur stigit till 15°. Bestäm hur lång tid det tar för att vinet skall uppnå serveringstemperaturen 18°.

  Antag att temperaturförändringen per tidsenhet är proportionell mot differensen mellan omgivningens temperatur och vinets temperatur. Svaret avrundas till heltal.

  Svar: ca 20 min.

Linjära differentialekvationer av andra ordningen

Definition

En differentialekvation på formen

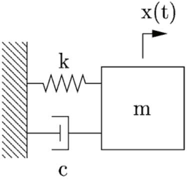
$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\,\frac{dy}{dx} + b(x)\,y = h(x) \tag{1}$$

kallas en linjär differentialekvation av ordning 2.
Om funktionerna $a(x)$ och $b(x)$ bägge är konstanta, har ekvationen (1) konstanta koefficienter.
Om funktionen $h(x) = 0$, kallas ekvationen (1) homogen. Om $h(x) \neq 0$, är (1) inhomogen.

Tillämpningar

Ekvationen (1) är intimt förknippad med matematisk modellering av

Mekanik: Vibrationer, fjädersvängningar, pendelrörelse, dämpad/odämpad harmonisk rörelse

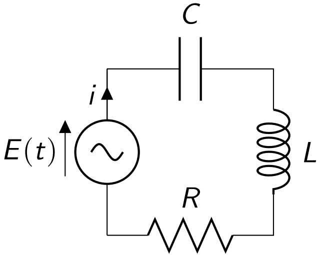


Det fjäderupphängda systemet uppfyller

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Elektrisk kretsteori: RLC-kretsar

Ekvationen (1) används även för matematisk modellering av RLC-kretsar.



Strömmen $i(t)$ uppfyller

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE}{dt}$$

Anmärkning

Det kan vara praktiskt att införa beteckningen

$$\mathsf{L}[y] = \left(\frac{d^2}{dx^2} + a(x)\,\frac{d}{dx} + b(x) \right)[y]$$

för V.L. i (1). Funktionen L är en s.k. linjär differentialoperator, som opererar på funktioner. Dess egenskaper är:

- $\mathsf{L}[y_1 + y_2] = \mathsf{L}[y_1] + \mathsf{L}[y_2]$,
- $\mathsf{L}[cy] = c\,\mathsf{L}[y]$, c konstant.

Superpositionsprincipen

Dessa två linearitetssamband har en viktig konsekvens (den s.k. superpositionsprincipen) när det gäller lösningarna till homogena ekvationer, dvs. ekvationer av typen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\,\frac{dy}{dx} + b(x)\,y = 0. \tag{2}$$

Sats

Om den linjära homogena differentialekvationen (2) har två lösningar y_1 respektive y_2, så kan den allmänna lösningen y till (2) alltid skrivas på formen

$$y = Ay_1 + By_2, \quad A,\ B \text{ konstanter}.$$

Bevis.

$$\mathsf{L}[Ay_1 + By_2] = \mathsf{L}[Ay_1] + \mathsf{L}[By_2] =$$
$$A\mathsf{L}[y_1] + B\mathsf{L}[y_2] = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0, \text{och vi är klara.}$$

□

Alternativt kan satsen uttryckas så:
När vi har bestämt två lösningar till (2), så har vi därmed bestämt samtliga lösningar. Detta tar vi med oss när vi nu går att lösa (2).

Anmärkning

Man lånar teori från den linjära algebran och säger att lösningarna y_1 respektive y_2 måste vara *linjärt oberoende*. Detta innebär för vår del:

Definition

Två funktioner y_1 och y_2 är linjärt oberoende om

$$y_1 \neq K \cdot y_2, \qquad K \text{ konstant.}$$

Specialfall

Generellt är andra ordningens differentialekvationer extremt svårlösta. Av den orsaken begränsar vi oss till ekvationer av typen av typen (1) i allmänhet, och till ekvationer av typen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\,\frac{dy}{dx} + b\,y = h(x) \tag{3}$$

i synnerhet. Ekvation (3) kallas *linjära andra ordningens differentialekvationer med konstanta koefficienter*.

Homogena andra ordn. d.e. med konstanta koeff.

Vi betraktar ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\,\frac{dy}{dx} + b\,y = 0, \tag{4}$$

där vi observerar att ekvationen har konstanta koefficienter a resp. b.
Ekvationen (4) löser vi genom följande princip (Eulers ansats, ca 1740):

- Ansatslösning: $y = e^{rx}$. Differentialoperatorn

$$\mathsf{L} = (\frac{d^2}{dx^2} + a\,\frac{d}{dx} + b).$$

- Ansatsen deriveras och sätts in i (4):

$$\mathsf{L}[e^{rx}] = (r^2 + ar + b)\,e^{rx}.$$

- $y = e^{rx}$ är lösning till (4), om och endast om r uppfyller den s.k. karakteristiska ekvationen

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{5}$$

Eulers ansats reducerar ekvationen (4) till en algebraisk ekvation.

Uttrycket $p(r) = r^2 + ar + b$ brukar ibland kallas det karakteristiska polynomet. Den karakteristiska ekvationen (5) har lösningarna

$$r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Det uppträder tre olika lösningstyper, beroende på uttrycket $a^2 - 4b$.

Fallet $a^2 - 4b > 0$: skilda, reella rötter

Vi inser, att om (5) har reella rötterna r_1 och r_2, $r_1 \neq r_2$, är lösningarna $y_1 = e^{r_1 x}$ och $y_2 = e^{r_2 x}$ linjärt oberoende och den allmänna lösningen till (4) kan skrivas:

$$y = A\,e^{r_1 x} + B\,e^{r_2 x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exempel

Bestäm den allmänna lösningen till

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6\,y = 0.$$

Fallet $a^2 - 4b = 0$: reell dubbelrot

Om (5) har reella dubbelroten r_1, får vi direkt en lösning $y_1 = e^{r_1 x}$. Vi behöver ännu en lösning, linjärt oberoende till y_1.

Man verifierar (i mer avancerade kurser) att $y_2 = x\, e^{r_1 x}$ är en sådan lösning, och den allmänna lösningen till (4) kan skrivas:

$$y = (A + Bx)\, e^{r_1 x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exempel

Bestäm den allmänna lösningen till

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\,\frac{dy}{dx} + 16\,y = 0.$$

Fallet $a^2 - 4b < 0$: skilda, komplexa rötter

Vi inser, att om (5) har komplexa rötterna $r_1 = \alpha + i\,\beta$ och $r_2 = \alpha - i\,\beta$, $r_1 \neq r_2$, är lösningarna $y_1 = e^{r_1 x}$ och $y_2 = e^{r_2 x}$ linjärt oberoende och den allmänna lösningen till (2) kan skrivas:

$$y = A\,e^{(\alpha + i\,\beta)\,x} + B\,e^{(\alpha - i\,\beta)\,x}, \qquad A, B \in \mathbb{C}.$$

Med användning av diverse räkneregler kan vi skriva

$$y = e^{\alpha\,x}\,\left((A+B)\,\cos\beta x + (A-B)\,i\,\sin\beta x\right).$$

Reella lösningar

Ur ett fysikaliskt perspektiv är man intresserad av reella lösningar, trots att (5) har komplexkonjugerade rötter. För speciella val av A och B kan vi nämligen ersätta de komplexa lösningarna med reella.

De komplexa rötterna $\alpha \pm i\,\beta$ ger därmed upphov till de linjärt oberoende reella lösningarna $v_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ resp. $v_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Den allmänna lösningen till (4) kan då skrivas:

$$y = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exempel

Bestäm den allmänna lösningen till

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\,\frac{dy}{dx} + 5\,y = 0.$$

Avslutande exempel

Ekvationen för en plan matematisk pendelrörelse kan för små utslagsvinklar approximeras till

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha = 0 \quad ,$$

där α (rad) är utslagsvinkeln, L (m) är pendellängden och g är tyngdfaktorn (9.8 N/kg).
Bestäm utslagsvinkeln efter en sekund om vi antar att $L = 0.2$ och $\alpha(0) = 3^\circ$ och begynnelsefarten 0 m/s. (Svar: ca 2.3°)