Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 10-11

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

2 februari 2016

Lekt 9

- Bestäm den allmänna lösningen till

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0.$$

Inhomogena fallet

Vi studerar ekvationer av typen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\,\frac{dy}{dx} + b\,y = h(x), \quad a, b \quad \text{konstanter.} \tag{1}$$

Sats

Antag att y_p är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen. (1). Då gäller att den allmänna lösningen y till (1) kan uttryckas på formen

$$y = y_h + y_p,$$

där y_h är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\,\frac{dy}{dx} + b\,y = 0. \tag{2}$$

När vi löser (1), använder vi följande metod:

1. Bestäm samtliga lösningar till $\mathrm{L}[y] = 0$,
2. Bestäm en lösning till $\mathrm{L}[y] = h(x)$.

Nu skall vi titta på några speciella typer av funktioner $h(x)$, som ofta förekommer i andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

Generell lösningsprincip: Metoden med obestämda koefficienter.

Metoden innebär att vi ansätter en lösning som liknar det föreskrivna högerledet. Låt oss exemplifiera.

Att bestämma y_p då $h(x)$ är ett polynom

Antag att $b \neq 0$ i (1). Då existerar en partikulärlösning $y_p = P_n(x)$, där $P_n(x)$ är ett polynom av samma grad som $h(x)$.

Exempel

Lös differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6\,y = 12x + 4. \tag{3}$$

Lösningsförslag Lösningarna till den homogena ekvationen är

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}. \quad \text{(Kontrollera!)}$$

Ansats: Metoden med obest. koeff.

För den inhomogena ekvationen används följande ansats

Ansats partikulärlösning: $y_p = Ax + B$.
(Fullständigt förstagradspolynom som ansats)

Derivering och insättning i (3) ger:

$$-A - 6(Ax + B) = 12x + 4.$$

Ekvationssystem

Vi identifierar koefficienterna och får ekvationssystemet:

$$\begin{cases} -6A &= 12 \\ -A - 6B &= 4 \end{cases}$$

Detta system har lösningarna $A = -2, B = -1/3$, och därmed är $y_p = -2x - 1/3$ en partikulärlösning, och ekvation (3) har den allmänna lösningen

$$y(x) = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} - 2x - 1/3, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Modifieringar av metoden

Exempel

Bestäm en partikulärlösning till

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,\frac{dy}{dx} - 3\,y = 4e^{-x}. \tag{4}$$

Lösningsförslag

Homogena fallet

Vi löser den karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r - 3 = 0$, vilket ger upphov till den homogena lösningen

$$y_h = A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-x}$$

Inhomogena fallet

Högerledet $h(x) = 4\mathrm{e}^{-x}$ är en lösning till den homogena ekvationen.

Det betyder att en ansatslösning av typen $y = C\mathrm{e}^{-x}$ är meningslös—vi kan inte ansätta en lösning som redan är "uppbokad" som en homogen lösning.

Speciell ansats

Vad är då att göra?

Om någon term i ansatsen $y_p(x)$ är en lösning till den homogena ekvationen (2), måste man ersätta y_p med $x^s\, y_p$, där s är det minsta positiva heltal, sådant att ingen term i $x^s\, y_p$ är lösning till den homogena ekvationen (2).

Denna ansats analyseras detaljerat i mer avancerade kurser.

För den inhomogena ekvationen (4) används följande ansats

Ansats partikulärlösning: $y_p = xA\mathrm{e}^{-x}$.

Derivering och insättning i (4) ger: (Kontrollera!)

$$\begin{aligned} -4A &= 4 \\ A &= -1 \end{aligned}$$

En partikulärlösning: $y_p = -x\mathrm{e}^{-x}$.

Superpositionsprincipen

Om y_1 respektive y_2 är två lösningar till

$$L[y] = H_1(x)$$

respektive

$$L[y] = H_2(x)$$

så kan man visa (Övning!) att $y_1 + y_2$ är en lösning till

$$L[y] = H_1(x) + H_2(x).$$

Avslutande exempel

Bestäm den allmänna lösningen till

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx} + \;y = x + 4e^{-x}$$

Svar: $(2x^2 + Ax + B)e^{-x} + x - 2$