Matematik III M0039M, Lp 3 2016
Lektion 13

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

5 februari 2016

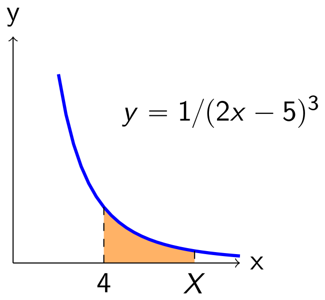
Generaliserade integraler

I definitionen av (Riemann-)integralen,finns det två viktiga förutsättningar:

- Funktionen f är begränsad,
- Funktionen f är definierad på ett begränsat intervall.

Om något av dessa två krav inte är uppfyllt, måste integraldefinitionen modifieras. I denna lektion skall vi studera s.k. generaliserade integraler.

Integrationsområdet ej begränsat



Exempel Vi låter $A(X)$ beteckna arean mellan x-axeln och kurvan $\dfrac{1}{(2x-5)^3}$, $4 \leqslant x \leqslant X$. Beräkna

$$A(X) = \int_4^X \frac{1}{(2x-5)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag

Vi får tämligen snabbt att

$$A(X) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{(2X-5)^2}\right).$$

Vad händer då $X \to \infty$? Vi konstaterar att $A(X) \to 1/36$. Detta kan vi alternativt uttrycka

$$\lim_{X\to\infty} \int_4^X \frac{1}{(2x-5)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{36} \quad ,$$

eller för korthetens skull

$$\int_4^\infty \frac{1}{(2x-5)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{36} \quad .$$

Definition

Om gränsvärdet

$$\lim_{X\to\infty}\int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x = A < \infty,$$

existerar, är den generaliserade integralen

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergent. Om gränsvärdet inte existerar, är den generaliserade integralen divergent.

Anmärkning

Det existerar också generaliserade integraler av typ

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Man definierar konvergens/divergens på analoga sätt som för integraler , generaliserade i ∞.

Viktiga hjälpmedel–Sats 10.11 och Sats 10.12 (a)

Sats (Jämförelsekriteriet)

Anta att $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *för* $a < x < b$.

(a) *Om* $\int_a^b g(x)\,dx$ *är konvergent, så är även* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergent.*

(b) *Om* $\int_a^b f(x)\,dx$ *är divergent, så är även* $\int_a^b g(x)\,dx$ *divergent.*

Sats (Sats 10.12 (a))

Integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \text{ är } \begin{cases} \text{konvergent} & \text{om} \quad p > 1, \\ \text{divergent} & \text{om} \quad p \leqslant 1. \end{cases}$$

Bevis.

Antag att $p \neq 1$. Då är (för $X \geqslant 1$):

$$\int_1^X \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{1-p}}{p-1}\right]_1^X = \frac{1}{p-1} - \frac{X^{1-p}}{p-1} \quad .$$

För $p > 1$ gäller

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{p-1} - \frac{X^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{p-1} \quad ,$$

dvs. konvergens. För $p = 1$ vet vi att integralen divergerar. För $p < 1$ gäller också divergens, eftersom uttrycket $\dfrac{X^{1-p}}{p-1}$ växer obegränsat då $X \to \infty$. □

Exempel

Avgör eventuell konvergens hos den generaliserade integralen

$$\int_{1/2}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Anmärkning

$$\frac{1}{1+x^3} < \frac{1}{x^3}$$

Exempel

Avgör eventuell konvergens hos den generaliserade integralen

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x.$$

Beräkna i förekommande fall integralens värde.

Obegränsade funktioner på ändliga intervall

Nu skall vi betrakta en funktion som är definierad på ett begränsat intervall $]a, b]$.

Exempel

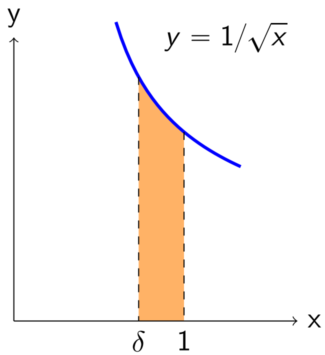
Integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

är ingen Riemann-integral, ty integranden är obegränsad nära $x = 0$*.*

Lösningsförslag

Vi kan dock resonera enligt följande:



Låt $A(\delta)$ beteckna arean mellan x-axeln och kurvan

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < \delta \leqslant x \leqslant 1.$$

Beräkna

$$A(\delta) = \int_{\delta}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_{\delta}^{1} = 2 - 2\sqrt{\delta}.$$

Vi låter $\delta \to 0+$. Vad händer med $A(\delta)$?

$$\lim_{\delta \to 0+} A(\delta) = \lim_{\delta \to 0+} (2 - 2\sqrt{\delta}) = 2 < \infty.$$

Uppenbarligen konvergerar vår integral.

Definition

Om gränsvärdet

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = A < \infty,$$

existerar, är den generaliserade integralen

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergent. Om gränsvärdet inte existerar, är den generaliserade integralen divergent.

Anmärkning

Det existerar också generaliserade integraler av typ

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad f \text{ är definierad på ett begränsat intervall } [a, b[$$

Man definierar konvergens/divergens på analoga sätt.

Exempel

Är den generaliserade integralen

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

konvergent?

Viktigt hjälpmedel–Sats 10.12 (b)

Sats (Sats 10.12 (b))

Integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \text{ är } \begin{cases} \textit{konvergent} & \textit{om} \quad p < 1, \\ \textit{divergent} & \textit{om} \quad p \geqslant 1. \end{cases}$$

Beviset lämnas som övning.

Anmärkning

Ibland är en integral generaliserad på fler än ett sätt. I så fall delar vi upp integralen i två eller flera delar och ställer som konvergenskrav att var och en av delintegralerna är konvergenta.

Exempel

Är den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

konvergent?

Anmärkning

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

Avslutande exempel

Arbetet W att förflytta en satellit (massa m) oändligt långt bort från jordytan (massa M, radie R) (SI-enheter), definieras av

$$W = \int_R^\infty \frac{GMm}{x^2}\,dx, \quad \text{där } G \text{ är en konstant.}$$

- Bestäm W.
- Vilken *flykthastighet* v_e alstrar en kinetisk energi $\frac{1}{2}mv_e^2$ som är lika stor som W? Sätt $R \approx 6.4 \cdot 10^6$ m, $M \approx 6.0 \cdot 10^{24}$ kg, $G \approx 6.7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$.

Anmärkning

Ibland kan man inte analytiskt uttrycka den primitiva funktionen till en generaliserad integral. Det klassiska exemplet är integralen

$$\int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad ,$$

vanligt förekommande i sannolikhetsteoretiska sammanhang.

Man kan trots det avgöra konvergensen genom att jämföra den generaliserade integralen med enkla integraler, vars konvergens man relativt lätt kan bestämma. I mer omfattande kurser diskuteras dessa jämförelsesatser.

Fallet $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

Vad händer om integrationsgränserna är $-\infty$ och ∞? I detta fall sätter vi in en delningspunkt c och skriver den ursprungliga integralen som en summa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vår ursprungliga integral konvergerar om och endast om var och en av integralerna i H.L. är konvergenta.

Försök på egen hand

Är den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

konvergent? Bestäm i så fall värdet.