Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 14-15

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

5 februari 2016

Lekt 14

Avgör eventuell konvergens hos integralen

- $$\int_1^{\infty} \frac{4\,dx}{x^2 + 4x}$$

- $$\int_0^1 x \ln x \, dx \quad \text{(Sats 3.11 (f) s. 145)}$$

Talföljder och serier

Talföljder och serier är två viktiga områden som den matematiska analysen vilar på. En viktig medlem i serie-familjen är de s.k. *potensserierna*.

En fundamental tankegång i klassisk analys är att funktioner kan låta sig representeras av vissa potensserier.

Känt sedan M0038M

Definition

En talföljd är en ordnad uppräkning av tal på formen

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Anmärkning

Alternativt säger man att en talföljd är en funktion, vars definitionsmängd är de naturliga talen.

Vi är bekanta med aritmetiska talföljder $a_n = a_1 + (n-1)d$ *resp. geometriska talföljder* $a_n = a_1\, k^{n-1}$.

Om konvergens hos talföljder

Vi känner nog igen gränsvärdesresonemaget från M0038M. Gränsvärdet hos en talföljd är ett specialfall av gränsvärdet för en funktion $f(x)$ då $x \to \infty$.

Definition

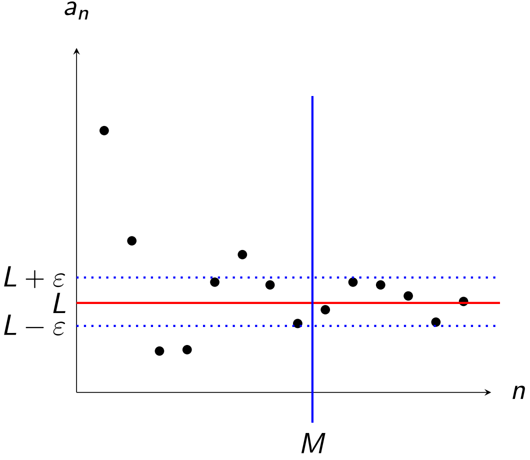
En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergerar mot värdet* L *om gränsvärdet*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

existerar.

Figur

Definitionen kan illustreras med följande figur. En konvergent talföljd stabiliserar sig mot värdet L.



Exempel

Beräkna

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n).$$

Serier

Definition

Uttryck av typen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

kallas serier. Talen a_k kallas seriens termer. Om alla $a_k \geqslant 0$ kallas serien en positiv serie.

Ett par exempel på serier.

Exempel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (\textit{Harmoniska serien})$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (\textit{Geometrisk serie, kvot } 1/2)$$

Anm: Ovanstående serier tillhör en speciell familj, de positiva seriena.

"Harmonisk" innebär att varje term är harmoniskt medelvärde till sina närmaste grannar, t. ex: $1/3 = \dfrac{2}{\frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/4}}$

Delsummor

Vi sätter

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
&\dots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Talen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ kallas seriens *delsummor*.

Konvergens hos serier

En intressant fråga är att avgöra om en serie har ett ändligt gränsvärde, trots att termernas antal går mot oändligheten. Här utgör delsummornas beteende ett viktigt verktyg.

Definition

Om

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s < \infty$$

är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergent med summan s.
Om gränsvärde saknas sägs serien vara divergent.

Specialfall: Geometrisk summa

En serie på formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} ax^{k-1} = a + ax + ax^2 + \dots$$

kallas en *geometrisk serie* med kvoten x. Den n-te delsumman

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} ax^{k-1}$$

kallas en geometrisk summa. Vi minns nog

$$s_n = a\frac{1 - x^n}{1 - x}, \quad \text{om } x \neq 1.$$

Nu använder vi s_n för att analysera seriens eventuella konvergens.

Slutsats

Om $|x| < 1$ gäller som bekant

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{a}{1-x}.$$

Vi sammanfattar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ax^{k-1} \begin{cases} \text{konvergent med summan} & \dfrac{a}{1-x} & \text{om } |x| < 1 \\ \text{divergent} & & \text{om } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Exempel

Visa att den harmoniska serien

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

är divergent.

Metod: Vi ska nyttja ett s.k. jämförelsekriterium för positiva, avtagande serier. Det kallas Cauchys integralkriterium.

Integralkriteriet–Sats 10.4

Antag att serien $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ är positiv och avtagande.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{är konvergent om och endast om} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{är det.}$$

Lösningsförslag

Vi studerar delsumman $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Integralen $\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(n)$ är divergent, då $n \to \infty$. Enligt Cauchys integralkriterium divergerar även den harmoniska serien.

Anmärkning

Den normandiske matematikern och biskopen Nicholas Oresme (ca1320-1382), var sannolikt den förste att bevisa den harmoniska seriens divergens.
För övrigt härledde Oreseme räkneregeln $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$.

Nödvändigt villkor för konvergens: Nollgränsvärde

Sats (Sats 10.1)

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergerar mot summan* s *innebär det att*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \quad \textit{men inte tvärtom.}$$

Bevis.

Betrakta

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0, \quad \text{då } n \to \infty.$$

$\square$

Viktig anmärkning

Villkoret

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

är *nödvändigt* men inte tillräckligt för att serien ska konvergera.

Minns den harmoniska serien som är divergent, trots nollgränsvärde.

Avslutande exempel

Avgör eventuell konvergens hos serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

Anm Kolla först om nödvändigt villkor är uppfyllt. Gå sedan vidare med analysen.