Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 14-15

Staffan Lundberg

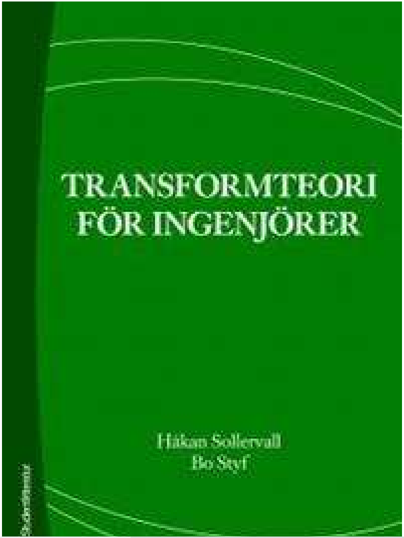
Luleå Tekniska Universitet

11 februari 2016

VIKTIGT MEDDELANDE

Fr o m Lekt 19 (22 feb enligt schema Luleå Campus) används läroboken i Transformteori.

- Sollervall-Styf: Transformteori för ingenjörer.
- ISBN: 9789144022000
- Upplaga: 3, Studentlitteratur



Dugga 23/2 kl 13.00, F40 (Luleå)

- Omfattning: T.o.m. Lektion 17 (Maclaurin- och Taylorutveckling),
- 90 min. skrivtid,
- 3 uppgifter.

Lekt 15

Visa att teleskopserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

är konvergent. Bestäm också summan.

Lösningsförslag

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \quad \text{(PBU)}$$

$$\text{(Delsumman)} \quad s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2} \quad \text{(Alla termer utom första och sista släcks: Teleskopsumma)}$$

$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 < \infty$. Vår teleskopserie är konvergent med summan 1.

Konvergenskriterier för positiva serier

Ibland kan man inte (som i teleskopserien) uttrycka s_n explicit som funktion av n, för att på så sätt enkelt avgöra konvergensen. Man kan i stället, med hjälp av speciella kriterier, analysera konvergensfrågor.

Under föregående lektion gjorde vi bruk av en sådan teknik.

Låt oss nu betrakta en speciell familj, de **positiva serierna**, dvs

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{där } a_n \geqslant 0$$

Cauchys integralkriterium–Sats 10.4

Sats

Antag att $a_n = f(n)$ *är positiv och avtagande på* $1 \leqslant x < \infty$. *Då är serien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konvergent} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \textit{konvergent.}$$

Exempel

Undersök om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+2n^2}$$

är konvergent.

Lösningsförslag

Positiv $\dfrac{x}{1+2x^2}$ är positiv för $x \geqslant 1$.

Avtagande Derivera!

$$f'(x) = \ldots = \frac{1-2x^2}{(1+2x^2)^2} \leqslant 0 \quad \text{för } x \geqslant 1 \quad \text{(Kontrollera!)}$$

$f(x)$ är uppenbarligen avtagande.

Cauchys integralkriterium

$$\int_1^X \frac{x}{1+2x^2}\,dx = \ldots = \frac{\ln(1+2X^2) - \ln 3}{4} \to \infty \quad \text{när } X \to \infty.$$

Integralen, och därmed serien, *divergerar*.

Viktig familjemedlem: p-serier

Sats (Sats 10.5)

p-serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \textit{konvergerar om } p > 1 \\ \textit{divergerar om } p \leqslant 1 \end{cases}$$

Bevis.

Cauchys integralkriterium.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \begin{cases} \text{konvergerar om } p > 1 \\ \text{divergerar om } p \leqslant 1 \end{cases}$$

□

Anmärkning

Speciellt gäller att den harmoniska serien divergerar.

Jämförelsekriterier

Antag att serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

är positiva.

Sats (Sats 10.6)

Antag dessutom att $a_n \leqslant b_n$.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergent* $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent* $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergent.*

Exempel

Vilka av följande serier konvergerar?

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{1+n^3}, \quad (c) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

Lösningsförslag–uppgift (a)

Fiffiga omskrivningar!

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$$

$$0 < \frac{1}{1+2^n} < \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{konv. geom. serie} \quad \text{(Jämförelsekriterium)}$$

Lösningsförslag–uppgift (b)

Anm: Här måste vi användas oss av raffinerade omskrivningar!

$$\text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{1+n^3}$$

$$0 < \frac{1+3n}{1+n^3} = \frac{1}{1+n^3} + \frac{3n}{1+n^3} < \frac{1}{n^3} + \frac{3n}{n^3} \underbrace{<}_{\text{ty } n^3 > n^2} \frac{1}{n^2} + \frac{3n}{n^3} < \frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \quad \text{konv. } p\text{-serie} \quad \text{(Jämförelsekriterium)}$$

Lösningsförslag–uppgift (c)

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$0 < \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad (\text{för } n \geqslant 2, \text{ ty } \ln n < n)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{div. } p\text{-serie} \quad (\text{Jämförelsekriterium})$$

Svar (a), (b) konv., (c) div.

Kvot- och rotkriteriet

Kvot- och rotkriteriet är användbara när man analyserar potensserier, en familj vi ska ägna oss åt under nästkommande lektion. Ett välbekant exempel är potensserien (den geometriska serien)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Under Lekt 14 kom vi fram till att denna serie konvergerar om $|x| < 1$. Med kvot- och rotkriteriet får vi ytterligare verktyg för att utreda konvergensen.

Anmärkning

På s. 448f behandlas s.k. *absolutkonvergenta serier*. Begreppet används vid analys av serier som har såväl positiva som negativa termer. Vår hittillsvarande konvergensanalys är något förenklad, eftersom vi betraktat enbart positiva serier.

d'Alemberts kvotkriterium–Sats 10.9 (b)

Sats (KK)

Antag att $a_n \geqslant 0$. *Om*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existerar, så gäller att

1. *Om* $|\rho| < 1$ *är serien* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*
2. *Om* $|\rho| > 1$ *är serien* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*
3. *Om* $|\rho| = 1$ *ger kvotkriteriet ingen information om konvergens/divergens.*

Exempel

Är följande serier konvergenta:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\text{(a)} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}} = \frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} \cdot \frac{1}{3} \qquad \text{osv.}$$

Cauchys Rotkriterium–Sats 10.9 (a)

Detta kriterium för positiva serier är snarlikt kvotkriteriet.

Anmärkning Serier av typen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$, dvs serier där a_n innehåller någon n:te-potens, är som gjorda för rotkriteriet.

Sats (RK)

Om

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

existerar eller är ∞, *så gäller att*

1. *Om* $0 \leqslant \sigma < 1$ *så är serien* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*
2. *Om* $1 < \sigma$ *är serien* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*
3. *Om* $\sigma = 1$ *ger rotkriteriet ingen information om konvergens/divergens.*

Avslutande exempel

Visa med kvot- och rotkriteriet (KK/RK) att följande serie är konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}.$$

Lösningsskiss

$$\text{KK} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^4 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n \cdot n^4} = \frac{(1+1/n)^4}{2}$$

$$\text{RK} \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^4}}{2} = \frac{(n^{1/n})^4}{2} = \frac{(e^{\frac{1}{n}\ln n})^4}{2}$$

Att öva på egen hand

- Visa med RK att följande serier är konvergenta:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n} \qquad (\mathrm{c}^*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

- Konvergerar eller divergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$? (Använd RK.)

Extra* Använd KK till uppg. (b)

Extra: Bevis av kvotkriteriet

Vi visar (1). Anta att $\rho < 1$. Eftersom

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existerar, måste $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r$ för lämpligt stort n, säg $n \geqslant N$.
(Välj r med $\rho < r < 1$)
Det betyder att

$$a_{N+1} \leqslant ra_N$$
$$a_{N+2} \leqslant ra_{N+1} \leqslant r^2 a_N$$
$$a_{N+3} \leqslant r^3 a_N$$
$$\dots$$
$$a_{N+k} \leqslant r^k a_N \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ Summera från } n = N \text{ och uppåt})$$

Fortsättning

Vi noterar att $a_N \sum_{k=0}^{\infty} r^k$ är en konvergent geom. serie.

Enligt jämförelsetestet är serien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergent och därmed är serien

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergent, och vi är klara.