Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 16

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

15 februari 2016

Lekt 16

Visa med rotkriteriet (RK) att följande serie är konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Skiss

Lekt 16

Visa med rotkriteriet (RK) att följande serie är konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Skiss

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}$$

Visa med rotkriteriet (RK) att följande serie är konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Skiss

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}$$

RK: $\quad \dfrac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n}} \to \dfrac{1}{e}, \quad$ då $n \to \infty$ (Enl. Sats 3.11 (e))

Potensserier

Definition

En serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

kallas en potensserie.

En viktig frågeställning är att avgöra för vilka x som potensserien konvergerar.

Kvotkriteriet, rotkriteriet ej att förglömma, är nog det verktyg som används allra mest för att testa konvergensen.

Vi känner redan till att den geometriska serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

konvergerar för $|x| < 1$. Detta faktum är ett specialfall av följande formulering:

Definition

Det existerar ett positivt tal R, så att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerar om $|x| < R$ och divergerar om $|x| > R$. Talet R benämns konvergensradie.

Anm För fallet $x = R$ måste konvergens och divergens analyseras med andra, ofta knepiga, metoder.

Anmärkning

I det praktiska räknandet kan följande utnyttjas:

Antag att

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \left(\text{Mer generellt: } L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

existerar eller är $= \infty$.

Då har potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergensradien $R = 1/L$.

- Om $L = 0$ innebär det att $R = \infty$, dvs. serien är konvergent $\forall x$.
- Om $L = \infty$ innebär det att $R = 0$, dvs. serien är konvergent endast för $x = 0$.

Exempel

Bestäm konvergensradien för

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Lösningsförslag

Beräkna konvergensradien med kvotkriteriet.

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \quad \to 0 = L \quad \text{då } n \to \infty$$

$$R = 1/L = \infty$$

Potensserien konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$ (med summan e^x, som vi snart skall se).

Exempel

För vilka $x \in \mathbb{R}_+$ är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ konvergent?

Lösningsförslag

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{3(n+1)} \to \frac{1}{3} = L \quad \text{då } n \to \infty$$

$$R = 1/L = 3$$

Svar Serien är konvergent för $0 < x < 3$.

Anmärkning

- Vår konvergensanalys är något förenklad. Vi har hittills räknat på positiva serier. En mer noggrann analys vidgar egenskaperna hos a_n, så att vi tillåter skiftande tecken när vi strax skall analysera *alternerande serier*. I sammanhanget studeras också begreppet *absolutkonvergens*. Se läroboken s. 448f.

Anmärkning

- Vår konvergensanalys är något förenklad. Vi har hittills räknat på positiva serier. En mer noggrann analys vidgar egenskaperna hos a_n, så att vi tillåter skiftande tecken när vi strax skall analysera *alternerande serier*. I sammanhanget studeras också begreppet *absolutkonvergens*. Se läroboken s. 448f.
- Läroboken är en i mängden av litteratur som nyttjar en alternativ kalkyl för hur KK används i potensserier. I vårt tidigare exempel skulle det bli med lärobokens kalkyler

$$\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{n3^n x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}x^n} = \frac{nx}{3(n+1)} \to \frac{x}{3} \quad \text{då } n \to \infty$$

Anmärkning

- Vår konvergensanalys är något förenklad. Vi har hittills räknat på positiva serier. En mer noggrann analys vidgar egenskaperna hos a_n, så att vi tillåter skiftande tecken när vi strax skall analysera *alternerande serier*. I sammanhanget studeras också begreppet *absolutkonvergens*. Se läroboken s. 448f.
- Läroboken är en i mängden av litteratur som nyttjar en alternativ kalkyl för hur KK används i potensserier. I vårt tidigare exempel skulle det bli med lärobokens kalkyler

$$\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{n3^n x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}x^n} = \frac{nx}{3(n+1)} \to \frac{x}{3} \quad \text{då } n \to \infty$$

Vi har konvergens (enl KK) om $\quad 0 < \dfrac{x}{3} < 1, \quad$ dvs $\quad 0 < x < 3.$

Konvergensradien R och dess praktiska konsekvenser

Om potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har konvergensradien R, innebär det att serien kan deriveras och integreras termvis, och att den nya serien också är konvergent.

Det innebär (för t ex numeriska beräkningar) att en konvergent potensserie beter sig som polynom (som självklart är deriver-/integrerbara).

Exempel

Bestäm en potensserie för $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ genom att utnyttja den konvergenta geometriska serien

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad (|x| < 1) \tag{1}$$

Lösningsförslag

En konvergent potensserie är (termvis) deriverbar. Derivera (1) ledvis:

$$-(-1)(1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots \qquad (|x| < 1)$$

Anmärkningar

- Serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ kallas en potensserie kring $x = x_0$.
- Punkten x_0 kallas ibland seriens konvergenscentrum.

Exempel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x - 5)^n$ har konvergensradien 2.
(Kontrollera på egen hand)

Konvergensintervallet: Åtminstone $|x - 5| < 2$.

Taylor- och Maclaurinserier

I många tekniska problem används s.k. *Maclaurin- eller Taylorutveckling* för att approximera en deriverbar funktion $f(x)$ med ett polynom.

Sir Brook Taylor (1685-1731), engelsk matematiker (vä bild), presenterade i en artikel från 1715 sin berömda formel. Den skotske matematikern Colin Maclaurin (1698-1746) (hö bild), utvecklade (i en uppsats skriven 1742) Taylorserierna kring $x = 0$.

Taylorserie

Definition

Om $f^{(n)}(a)$ existerar för $n = 0, 1, 2, \ldots$, kallas serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylorserien för f kring punkten $x = a$. Om $a = 0$ kallas serien en Maclaurinserie.

Taylorpolynom

Låt oss resonera litet mer generellt:
Vi önskar approximera funktionen $f(x)$ i en omgivning av $x = a$.
Funktionen $f(x)$ är "många gånger" deriverbar omkring $x = a$.

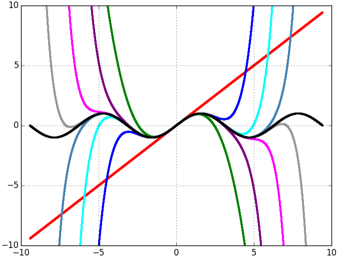
Metod: konstruera ett polynom P_n (grad högst n) som approximerar f.
Välj P_n så, att det och dess derivator i $x = a$ upp till och med n:te ordning har samma värden som f och sina derivator:

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Graf

Här ser vi en graf av funktionen $f(x) = \sin x$ (svart graf) och några av dess Taylorpolynom kring origo.

Ju högre grad, desto bättre ansluter sig polynomen kring sinuskurvan "nära" $x = 0$.



Taylors formel med Lagranges restterm

Låt f vara en funktion som har $n+1$ kontinuerliga derivator i en omgivning av punkten $x = a$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x),$$

där feltermen $E_n(x)$ (*Lagranges restterm*) definieras som

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ , för } c \text{ mellan } a \text{ och } x.$$

Anm Joseph Loius Lagrange (1736-1813), berömd fransk teoretiker, införde bland annat derivatabeteckningarna $f', f'', f^{(3)}, \ldots$ och formulerade resttermen för T-serien. Tog avstånd från geometri och beskrev t. ex. mekaniken analytiskt.

Anmärkning

När man approximerar en funktion med ett Taylorpolynom, måste man alltid *trunkera* ("hugga av") polynomet, dvs. göra polynomet ändligt. Exempelvis

$$e^x \approx P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \quad \text{(Här trunkeras polynomet efter 4 termer)}$$

Med hjälp av Lagranges restterm kan man **uppskatta felets storlek**.

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Detta har betydelse vid t. ex. numeriska beräkningar. Med resttermsuppskattning kan man avgöra var Taylorpolynomet ska huggas av, för att erhålla önskad noggrannhet.

Avslutande exempel

Bestäm $P_5(x)$, dvs Taylorpolynomet av ordning 5, för $f(x) = \arctan x$ kring punkten $x = 1$. Bestäm sedan med hjälp av $P_5(x)$ ett närmevärde till $\arctan(0.9)$.

Lösningsförslag

Funktion	Funkt.värde
$f = \arctan x$	$f(1) = \pi/4$
$f' = \frac{1}{x^2+1}$	$f'(1) = 1/2$
$f'' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$f''(1) = -1/2$
$f^{(3)} = \frac{6x^2-2}{x^6+3x^4+3x^2+1}$	$f^{(3)}(1) = 1/2$
$f^{(4)} = -\frac{24x^3-24x}{x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1}$	$f^{(4)}(1) = 0$
$f^{(5)} = \frac{120x^4-240x^2+24}{x^{10}+5x^8+10x^6+10x^4+5x^2+1}$	$f^{(5)}(1) = -3$

Resultat

Taylorpolynomet av femte ordning blir

$$P_5(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 =$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} - \frac{(x-1)^5}{40}$$

Anm Med hjälp av $P_5(x)$ och en miniräknare bestämmer vi

$\arctan(0.9) \approx 0.73281508$ ($\tan^{-1}$-knappen på miniräknaren: 0.732815102)

Femtegradspolynomet ger ett skapligt närmevärde .