Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 18

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

17 februari 2016

Lekt 17

Visa att $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $|x| < 1$, har Maclaurinserien

$$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

Bestäm därefter ett närmevärde till $\ln 2$. Ta med tre termer.

Lösningsförslag

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \quad \text{(Räkneregler)}$$

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - x^5/5 + \dots \quad \text{(Tabellsamling)}$$

Lösningsförslag

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \quad \text{(Räkneregler)}$$

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 + \ldots$$

$$\ln(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - x^5/5 + \ldots \quad \text{(Tabellsamling)}$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= x - x^2/2 + x^3/3 + \ldots - (-x - x^2/2 - x^3/3 + \ldots) =$$

$$= 2x + 2x^3/3 + 2x^5/5 + \ldots$$

Lösningsförslag

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \quad \text{(Räkneregler)}$$

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 + \ldots$$

$$\ln(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - x^5/5 + \ldots \quad \text{(Tabellsamling)}$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= x - x^2/2 + x^3/3 + \ldots - (-x - x^2/2 - x^3/3 + \ldots) =$$

$$= 2x + 2x^3/3 + 2x^5/5 + \ldots$$

Lös x så att $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$, ger att $x = 1/3$

$$\ln(2) \approx 2/3 + 2(1/3)^3/3 + 2(1/3)^5/5 = \frac{842}{1215} \approx 0.6930$$

Potensseriemetoden – ett sätt att lösa ODE

Vi vet sedan tidigare att linjära ODE med konstanta koefficienter kan vi lösa med algebraiska metoder, och att lösningarna kan skrivas i termer av elementära funktioner.
Många ekvationer har emellertid lösningar som inte enkelt kan uttryckas i termer av elementära funktioner. Under denna lektion ska vi betrakta en metod, som går ut på att beskriva lösningen som en potensserie.

Exempel

Bestäm en potensserielösning till

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0. \tag{1}$$

Vi ansätter en lösning i form av en potensserie

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{2}$$

Exempel

Bestäm en potensserielösning till

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0. \tag{1}$$

Vi ansätter en lösning i form av en potensserie

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{2}$$

Vi antar att potensserien har en konvergensradie $R > 0$. Då får vi derivera (2) termvis, enligt Sats 10.16 i FN:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \tag{3}$$

Exempel

Bestäm en potensserielösning till

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0. \tag{1}$$

Vi ansätter en lösning i form av en potensserie

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{2}$$

Vi antar att potensserien har en konvergensradie $R > 0$. Då får vi derivera (2) termvis, enligt Sats 10.16 i FN:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \tag{3}$$

Vi sätter in (3) och (2) i (1):

$$(c_1 + 2c_2 x + \ldots) + 2x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) = 0.$$

Vårt mål är att bestämma koefficienterna c_n.

Med summatecken skriver vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0 \tag{4}$$

Med summatecken skriver vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0 \tag{4}$$

Vi ändrar numreringen av (4) så att exponenten till x har samma uttryck:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k = 0 \tag{5}$$

Med summatecken skriver vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0 \tag{4}$$

Vi ändrar numreringen av (4) så att exponenten till x har samma uttryck:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k = 0 \tag{5}$$

eller

$$\underbrace{c_1}_{k=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \big((k+1)c_{k+1} + 2c_{k-1}\big)x^k = 0.$$

Rekursionsformel

y är en lösning till differentialekvationen (1) om och endast om

$$c_1 = 0$$

$$(k+1)c_{k+1} + 2c_{k-1} = 0,$$

vilket leder oss till rekursionsformeln

$$c_{k+1} = -\frac{2c_{k-1}}{(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Vi sätter in några k-värden, för att om möjligt skönja ett mönster:

k	Koefficient
1	$c_2 = -\dfrac{2c_0}{2} = -c_0$
2	$c_3 = -\dfrac{2c_1}{3} = 0$
3	$c_4 = -\dfrac{2c_2}{4} = \dfrac{1}{2}c_0$
4	$c_5 = -\dfrac{2c_3}{5} = 0$
5	$c_6 = -\dfrac{2c_4}{6} = -\dfrac{c_0}{3!}$
6	$c_7 = -\dfrac{2c_5}{7} = 0$
7	$c_8 = -\dfrac{2c_6}{8} = \dfrac{c_0}{4!}$

Vi noterar att $c_1, c_3, c_5, c_7, \ldots$ alla är lika med noll. Vidare noterar vi att $c_2, c_4, c_6, \ldots$ alla kan beskrivas i termer av c_0.
Vi skriver detta konstaterande mer generellt:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

respektive

$$c_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Den allmänna lösningen (2) till ekvation (1) kan därmed skrivas på formen

$$y = c_0 \left(1 - x^2 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3!} x^6 + \ldots \right) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \qquad (6)$$

där c_0 är en godtycklig reell konstant.

Anmärkning

Potensserien i (6) är konvergent med summan e^{-x^2}, dvs den allmänna lösningen kan alternativt uttryckas på formen

$$y = c_0 e^{-x^2}.$$

Denna lösning kan vi alternativt bestämma med integrerande faktor, eftersom (1) är en linjär ODE av ordning 1.
Gör detta som nyttig repetition.

Varför fungerar potensseriemetoden?

Vi betraktar en linjär differentialekvation

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{7}$$

Om det gäller att koefficientfunktionerna $P(x)$ och $Q(x)$ är *analytiska* i ett område, dvs. om P och Q kan utvecklas i konvergenta potensserier kring varje punkt i området, gäller enligt en sats i funktionsteorin, att lösningen till (7), $y(x)$, ärver denna viktiga egenskap, nämligen att lösningen också kan utvecklas i en konvergent potensserie (som dessutom har egenskapen att den kan deriveras termvis).

I vårt exempel studerade vi differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

Vi betraktar koefficienten för y, polynomfunktionen $Q(x) = 2x$. Ett polynom är vad man brukar säga, en "snäll" funktion.
Litet mer precist brukar man säga att en polynomfunktion är *analytisk* i ett område.
Med andra ord kan ett polynom uttryckas som en konvergent potensserie.
Andra funktioner med denna viktiga egenskap är våra elementära funktioner.

Avslutande exempel

Lös med potensseriemetoden BVP

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{8}$$

Lösningsförslag

Vi antar att det existerar en lösning i form av en potensserie

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{9}$$

Vi deriverar (9) termvis:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \tag{10}$$

respektive

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \tag{11}$$

Vi ändrar numreringen av (11):

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k \tag{12}$$

Vi sätter in (9) och (12) i (8):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0,$$

eller

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big((k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k\big)x^k = 0.$$

Teorin säger att y är en lösning till differentialekvationen (8) om och endast om

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k = 0,$$

vilket leder oss till rekursionsformeln

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Beroende på om k är jämnt eller udda så får man till sist ett uttryck som innehåller c_0 eller c_1.

$$\text{För jämna index:} \quad c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{(2k)!}$$

$$\text{För udda index:} \quad c_{2k+1} = (-1)^k \frac{c_1}{(2k+1)!}$$

Vi sätter in ovanstående i (9), vilket gör att vi kan skriva den allmänna lösningen som

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k =$$

$$= c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \right) +$$

$$+ c_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \right)$$

Begynnelsevillkor

Våra begynnelsevillkor ger $c_0 = y(0) = 1$ respektive $c_1 = y'(0) = 0$.
Således kan vi skriva den sökta lösningen

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Denna serie är konvergent med välbekanta summan $y = \cos x$.

Begynnelsevärdesproblemet (8) har lösningen $y = \cos x$.
Denna lösning kan vi alternativt bestämma med karakteristisk ekvation, eftersom (8) är en 2:a ordningens homogen ODE.
Gör detta som nyttig repetition.

Lös på egen hand

Bestäm de fyra första nollskilda termerna i en potensserieutveckling kring $x = 0$ av lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' + (x + 2)y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Svar: $y = 1 - 2x + (3/2)x^2 - (1/3)x^3 + \ldots$