Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 23

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

29 februari 2016

Lätt modifiering av lektionsplanen

Jag kastar om nuvarande Lekt 25-26 och Lekt 24.
Ändring publicerad på Fronter.

- Lekt 24, On 2 mars: Heavisidefunktionen.
- Lekt 25, Fr 4 mars: Heavisidefunktionen, forts.
- Lekt 26, Må 7 mars: System av linjära diffekv.

Lekt 21-22

Inverstransformera

$$\frac{3s+4}{s^2+4s+5}$$

Derivator och deras Laplacetransformer

Bestäm Laplacetransformen av $\dfrac{d}{dt}\big(f(t)\big)$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\} = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt = \qquad \text{(P.I.)}$$

$$= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} = sF(s) - f(0),$$

förutsatt att $f(t)\, e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$.

Derivator och deras Laplacetransformer

Bestäm Laplacetransformen av $\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\} = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt = \quad \text{(P.I.)}$$

$$= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} = sF(s) - f(0),$$

förutsatt att $f(t)\, e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$.

Derivator och deras Laplacetransformer

Bestäm Laplacetransformen av $\dfrac{d}{dt}\big(f(t)\big)$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\} = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt = \qquad \text{(P.I.)}$$

$$= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} = sF(s) - f(0),$$

förutsatt att $f(t)\, e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$.

Derivator och deras Laplacetransformer

Bestäm Laplacetransformen av $\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\} = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt = \quad \text{(P.I.)}$$

$$= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} = sF(s) - f(0),$$

förutsatt att $f(t)\, e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$.

Laplacetransformen av $\dfrac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = \int_0^\infty \frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt = \qquad \text{(P.I.)}$$

$$= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= -f'(0) + s\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\},$$

förutsatt att $f'(t)\, e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$. Vi får, med tidigare kända kalkyler

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = -f'(0) + s\left(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right) =$$

$$= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Laplacetransformen av $\dfrac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = \int_0^\infty \frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt = \qquad (\text{P.I.})$$

$$= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= -f'(0) + s\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\},$$

förutsatt att $f'(t)\, e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$. Vi får, med tidigare kända kalkyler

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = -f'(0) + s\left(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right) =$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Laplacetransformen av $\dfrac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = \int_0^\infty \frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt = \qquad \text{(P.I.)}$$

$$= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= -f'(0) + s\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\},$$

förutsatt att $f'(t)\, e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$. Vi får, med tidigare kända kalkyler

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = -f'(0) + s\left(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right) =$$

$$= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Laplacetransformen av $\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = \int_0^\infty \frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt = \quad \text{(P.I.)}$$

$$= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= -f'(0) + s\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\},$$

förutsatt att $f'(t)\, e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$. Vi får, med tidigare kända kalkyler

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = -f'(0) + s\left(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right) =$$

$$= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Laplacetransformen av $\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = \int_0^\infty \frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\,e^{-st}\,dt = \quad \text{(P.I.)}$$

$$= \left[e^{-st}f'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\,e^{-st}\,dt =$$

$$= -f'(0) + s\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\},$$

förutsatt att $f'(t)\,e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$. Vi får, med tidigare kända kalkyler

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)\big)\right\} = -f'(0) + s\,(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) =$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Laplacetransform för högre derivator

Vi kan generalisera våra hittills framtagna transformer och skriver (för $s > a$)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}\big(f(t)\big)\right\} = s^n\,\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

förutsatt att f och dess derivator är styckvis kontinuerliga på $\mathbb{R}_+$ och växer högst exponentiellt.

Udda exempel

Givet $f(t) = \sin(bt)$ och $\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \dfrac{b}{s^2+b^2}$, bestäm $\mathcal{L}\{\cos(bt)\}$.

Lösningsförslag

$$f(0) = 0, \quad f'(t) = b\cos(bt). \quad \text{(Enl. föruts.)}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{b\cos(bt)}_{f'(t)}\right\} = \big(s\,\mathcal{L}\{\sin(bt)\} - f(0)\big) = \frac{bs}{s^2+b^2},$$

$$b\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{bs}{s^2+b^2}, \quad \text{(Div. med } b\text{)}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2} \quad \textit{Klart!}$$

Udda exempel

Givet $f(t) = \sin(bt)$ och $\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \dfrac{b}{s^2 + b^2}$, bestäm $\mathcal{L}\{\cos(bt)\}$.

Lösningsförslag

$$f(0) = 0, \quad f'(t) = b\cos(bt). \quad \text{(Enl. föruts.)}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{b\cos(bt)}_{f'(t)}\right\} = \left(s\,\mathcal{L}\{\sin(bt)\} - f(0)\right) = \frac{bs}{s^2 + b^2},$$

$$b\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{bs}{s^2 + b^2}, \quad \text{(Div. med } b\text{)}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2 + b^2} \quad \textit{Klart!}$$

Udda exempel

Givet $f(t) = \sin(bt)$ och $\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \dfrac{b}{s^2+b^2}$, bestäm $\mathcal{L}\{\cos(bt)\}$.

Lösningsförslag

$$f(0) = 0, \quad f'(t) = b\cos(bt). \quad \text{(Enl. föruts.)}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\big(f(t)\big)\right\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

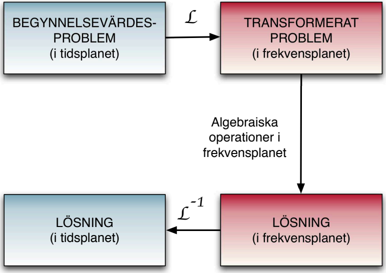
$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{b\cos(bt)}_{f'(t)}\right\} = \big(s\,\mathcal{L}\{\sin(bt)\} - f(0)\big) = \frac{bs}{s^2+b^2},$$

$$b\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{bs}{s^2+b^2}, \quad \text{(Div. med } b\text{)}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2} \quad \textit{Klart!}$$

Om att lösa begynnelsevärdesproblem (BVP)

Följande ritual skall vi nyttja vid lösning av BVP:



Exempel

Lös BVP $y' - y = e^{2t}$, $BV : y(0) = 2$.

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\{y' - y\} = \mathcal{L}\{e^{2x}\} \quad \text{(L-transf. bägge led, } Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}\text{)}$$

$$sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s-2} \quad \text{(Räkneregl., Tabell)}$$

$$Y(s) = \frac{2s-3}{(s-2)(s-1)} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1} \quad \text{(Partbråk, H-P)}$$

Svar : $y(t) = e^{2t} + e^{t}$. (Invers L-transf. ur tabell)

Övn: Lös problemet utan L-transf.

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\{y' - y\} = \mathcal{L}\{e^{2x}\} \quad (\text{L-transf. bägge led, } Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\})$$

$$sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s-2} \quad \big(\text{Räkneregl., Tabell}\big)$$

$$Y(s) = \frac{2s-3}{(s-2)(s-1)} \quad (\text{Lös ut } Y)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1} \quad (\text{Partbråk, H-P})$$

Svar : $y(t) = e^{2t} + e^{t}$. (Invers L-transf. ur tabell)

Övn: Lös problemet utan L-transf.

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{y' - y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{2x}\right\} \quad \text{(L-transf. bägge led, } Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}\text{)}$$

$$sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s-2} \quad \text{(Räkneregl., Tabell)}$$

$$Y(s) = \frac{2s-3}{(s-2)(s-1)} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1} \quad \text{(Partbråk, H-P)}$$

Svar : $y(t) = e^{2t} + e^{t}$. (Invers L-transf. ur tabell)

Övn: Lös problemet utan L-transf.

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{y' - y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{2x}\right\} \quad \text{(L-transf. bägge led, } Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}\text{)}$$

$$sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s-2} \quad \big(\text{Räkneregl., Tabell}\big)$$

$$Y(s) = \frac{2s-3}{(s-2)(s-1)} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1} \quad \text{(Partbråk, H-P)}$$

Svar : $\quad y(t) = e^{2t} + e^{t}. \quad$ (Invers L-transf. ur tabell)

Övn: Lös problemet utan L-transf.

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{y' - y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{2x}\right\} \quad \text{(L-transf. bägge led, } Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}\text{)}$$

$$sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s-2} \quad \big(\text{Räkneregl., Tabell}\big)$$

$$Y(s) = \frac{2s-3}{(s-2)(s-1)} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1} \quad \text{(Partbråk, H-P)}$$

Svar : $\quad y(t) = e^{2t} + e^{t}. \quad$ (Invers L-transf. ur tabell)

Övn: Lös problemet utan L-transf.

Avslutande exempel

Lös BVP $y'' + 5y' + 6y = 1$, $BV: y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 5y' + 6y\right\} = \mathcal{L}\left\{1\right\} \quad \text{(L-transf. bägge led, } Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}\text{)}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s} \quad \text{(Räkneregl., Tabell)}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{6s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+3} \quad \text{(Partbråk, HP)}$$

<u>*Svar :*</u> $y(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot e^{-2t} - \frac{2}{3}\cdot e^{-3t}.$ (Invers L-transf. ur tabell)

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 5y' + 6y\right\} = \mathcal{L}\{1\} \quad \text{(L-transf. bägge led, } Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}\text{)}$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s} \quad \text{(Räkneregl., Tabell)}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{6s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+3} \quad \text{(Partbråk, HP)}$$

Svar : $y(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot e^{-2t} - \frac{2}{3}\cdot e^{-3t}$. (Invers L-transf. ur tabell)

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 5y' + 6y\right\} = \mathcal{L}\{1\} \quad \text{(L-transf. bägge led, } Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}\text{)}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s} \quad \left(\text{Räkneregl., Tabell}\right)$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{6s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+3} \quad \text{(Partbråk, HP)}$$

<u>*Svar :*</u> $y(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot e^{-2t} - \frac{2}{3}\cdot e^{-3t}$. (Invers L-transf. ur tabell)

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 5y' + 6y\right\} = \mathcal{L}\left\{1\right\}$$ (L-transf. bägge led, $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}$)

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s}$$ (Räkneregl., Tabell)

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$$ (Lös ut Y)

$$Y(s) = \frac{1}{6s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+3}$$ (Partbråk, HP)

Svar : $y(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot e^{-2t} - \frac{2}{3}\cdot e^{-3t}.$ (Invers L-transf. ur tabell)

Lösningsförslag

$$\mathcal{L}\left\{y'' + 5y' + 6y\right\} = \mathcal{L}\{1\} \quad \text{(L-transf. bägge led, } Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}\text{)}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s} \quad \text{(Räkneregl., Tabell)}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{6s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+3} \quad \text{(Partbråk, HP)}$$

Svar : $y(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} - \frac{2}{3} \cdot e^{-3t}.$ (Invers L-transf. ur tabell)

Lös på egen hand

Lös med L-transformering BVP

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 6e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
$$\text{BV: } y(0) = 4, \quad y'(0) = 3.$$
$$(Svar : (1 - 2t)e^{-t} + 3e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}_+)$$

Lös på egen hand

Lös med L-transformering BVP

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 4x &= \sin 2t \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

Svar:

$$\mathrm{x}\,(t) = \frac{\sin\,(2\,t)}{5} - \frac{\cos\,(2\,t)}{10} + \frac{e^{-4\,t}}{10}$$