Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 27-28

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

7 mars 2016

Lekt 26

Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + x + 2y = 0 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Struktur

Faltning och Laplacetransformer

Ibland känner man funktionerna $f(t)$ och $g(t)$ med respektive transformer $F(s)$ och $G(s)$. Problemet är att inverstransformera produkten $H(s) = F(s)G(s)$. Hur går man tillväga?

Sats

Låt $f(t)$ och $g(t)$ vara kausala. Vi förutsätter styckvis kontinuitet. Den s.k. faltningen av $f(t)$ och $g(t)$ med beteckning $f \star g$, definieras som

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx$$

Då gäller:

$$\mathcal{L}\{f \star g\} = F(s)G(s)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f \star g$$

Anmärkningar

Laplacetransformen omvandlar

- en differentialekvation eller en integralekvation till en algebraisk ekvation
- en faltning till en multiplikation

Exempel

Bestäm $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, där

$$H(s) = \frac{1}{(1+s^2)^2}.$$

Lösningsförslag:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\cdot\frac{1}{1+s^2}\right\} = \quad \text{(Faltningssatsen)}$$

$$= \sin(t) \star \sin(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^t \sin(x)\sin(t-x)\,dx =$$

Lösningsförslag:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\cdot\frac{1}{1+s^2}\right\} = \quad \text{(Faltningssatsen)}$$

$$= \sin(t) \star \sin(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \sin(x)\sin(t-x)\,dx =$$

$$= \int_0^t \sin x\big(\sin t\cos x - \cos t\sin x\big)\,dx =$$

Lösningsförslag:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\cdot\frac{1}{1+s^2}\right\} = \quad \text{(Faltningssatsen)}$$

$$= \sin(t) \star \sin(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^t \sin(x)\sin(t-x)\,dx =$$

$$= \int_0^t \sin x\big(\sin t\cos x - \cos t\sin x\big)\,dx =$$

$$= \sin t\int_0^t \sin x\cos x\,dx - \cos t\int_0^t \overbrace{\sin^2 x}^{\frac{1-cos2x}{2}}\,dx = \quad \text{(Forts nästa sida)}$$

$$= \sin t \left[\frac{\sin^2 x}{2} \right]_{x=0}^{x=t} - \cos t \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{x=0}^{x=t} = \quad (\sin 2t = 2 \sin t \cos t) =$$

$$= \sin t \left[\frac{\sin^2 x}{2} \right]_{x=0}^{x=t} - \cos t \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{x=0}^{x=t} = \qquad (\sin 2t = 2 \sin t \cos t) =$$

$$= \sin t \left(\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{2} \right) - \frac{t}{2} \cos t =$$

$$= \sin t \left[\frac{\sin^2 x}{2} \right]_{x=0}^{x=t} - \cos t \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{x=0}^{x=t} = \quad (\sin 2t = 2 \sin t \cos t) =$$

$$= \sin t \left(\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{2} \right) - \frac{t}{2} \cos t =$$

$$= \frac{1}{2} \big(\sin t - t \cos(t) \big) \quad (\text{Faltningen är en funktion av } t)$$

Några räkneregler

$$f \star g = g \star f \quad \text{(Kommutativitet)}$$
$$f \star (g_1 + g_2) = f \star g_1 + f \star g_2 \quad \text{(Distr. lag)}$$

Några räkneregler

$$f \star g = g \star f \quad \text{(Kommutativitet)}$$
$$f \star (g_1 + g_2) = f \star g_1 + f \star g_2 \quad \text{(Distr. lag)}$$

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) \quad \text{(Assoc. lag)}$$
$$f \star \delta = \delta \star f = f \quad (\delta\text{-funktionen fungerar som "faltnings-etta"})$$
$$f \star 0 = 0 \star f = 0 \quad \text{(Precis som för vanlig multiplikation)}$$

Avslutande exempel, Lekt 27

Låt $f(t) = t^2$ och $g(t) = t^3$ vara kausala.

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx = \int_0^t (t-x)^2\,x^3\,dx =$$

$$\int_0^t (t^2 - 2tx + x^2)\,x^3\,dx = \int_0^t (x^3 t^2 - 2tx^4 + x^5)\,dx =$$

Avslutande exempel, Lekt 27

Låt $f(t) = t^2$ och $g(t) = t^3$ vara kausala.

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx = \int_0^t (t-x)^2\,x^3\,dx =$$

$$\int_0^t (t^2 - 2tx + x^2)\,x^3\,dx = \int_0^t (x^3t^2 - 2tx^4 + x^5)\,dx =$$

$$\left[\frac{x^4t^2}{4} - \frac{2tx^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=t} =$$

$$= \frac{t^6}{4} - \frac{2t^6}{5} + \frac{t^6}{6} = \frac{t^6}{60}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Alternativ: Faltningssatsen

$$\mathcal{L}\left\{f \star g\right\} = F(s)G(s)$$

$$F(s) = \frac{2}{s^3}, \quad G(s) = \frac{3!}{s^4}$$

$$F(s)G(s) = \frac{12}{s^7}, \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \quad \text{(Förbered tabell)}$$

Alternativ: Faltningssatsen

$$\mathcal{L}\{f \star g\} = F(s)G(s)$$

$$F(s) = \frac{2}{s^3}, \quad G(s) = \frac{3!}{s^4}$$

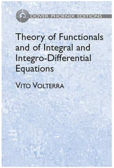
$$F(s)G(s) = \frac{12}{s^7}, \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \quad \text{(Förbered tabell)}$$

$$= \frac{12}{6!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6!}{s^7}\right] = \frac{1}{60}\,t^6 = f(t) \star g(t).$$

Struktur

Integralekvationer av Volterra-typ

Faltningen brukar ofta användas som verktyg när man löser s.k. integralekvationer. Dessa ekvationer har sitt ursprung i en artikel av V. Volterra (1860-1940), italiensk matematiker. Volterras arbete finns sammanfattat i boken "Theory of functionals and of Integral and Integro-Differential Equations", publicerad 1930.



En linjär Volterra-ekvation av faltningstyp har utseendet

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-x)y(x)\,dx, \quad \text{där } K(t-x) \text{ kallas kärnan.}$$

Exempel

Lös integralekvationen

$$y(t) = t + \int_0^t y(x)\sin(t-x)\,dx.$$

Lösningsförslag

Vi sätter $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

$$y(t) = t + y(t) \star \sin(t) \quad \text{(Uttryck ekv. i faltnings-termer)}$$

$$Y = \frac{1}{s^2} + Y \cdot \frac{1}{s^2+1} \quad \text{(L-transf + faltningssatsen)}$$

Lösningsförslag

Vi sätter $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

$$y(t) = t + y(t) \star \sin(t) \quad \text{(Uttryck ekv. i faltnings-termer)}$$

$$Y = \frac{1}{s^2} + Y \cdot \frac{1}{s^2+1} \quad \text{(L-transf + faltningssatsen)}$$

$$Y = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$y(t) = t + \frac{t^3}{6} \quad \text{(Inverstransf., tabell)}$$

Avslutande exempel

Lös integro-differentialalekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \sin t - \int_0^t y(x)\,dx, \quad y(0) = 0.$$

Lösningsförslag

Vi sätter $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

$$y'(t) = 1 - \sin t - 1 \star y(t) \quad \text{(Uttryck ekv. i faltnings-termer)}$$

$$sY = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s} \cdot Y \quad \text{(L-transf + faltningssatsen)}$$

Lösningsförslag

Vi sätter $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

$$y'(t) = 1 - \sin t - 1 \star y(t) \quad \text{(Uttryck ekv. i faltnings-termer)}$$

$$sY = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s} \cdot Y \quad \text{(L-transf + faltningssatsen)}$$

$$Y \cdot \frac{s^2+1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

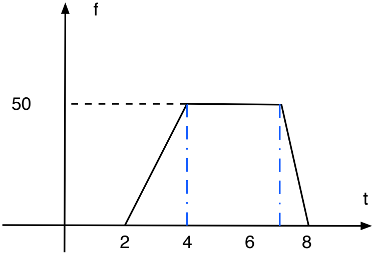
$$Y = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2} \quad \text{(Lös ut } Y\text{)}$$

$$y(t) = \sin t - \frac{t}{2}\sin t \quad \text{(Inverstransf., tabell)}$$

Det var väl ungefär det hela. . .

Egen övning

Betrakta vidstående kausala funktion. Bestäm ett funktionsuttryck för $f(t)$ samt funktionens Laplacetransform.



Svar $\mathcal{L}\{f\} = \frac{25}{s^2}\left(e^{-2s} - e^{-4s} - 2e^{-7s} + e^{-8s}\right)$

Läs och lös på egen hand

Lös

$$y'' + 10y' + 24y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

med hjälp av faltningsmetoden. $f(t)$ är en godtycklig kontinuerlig funktion.

Lösningsförslag–tjuvkika inte

$$\text{Sätt } \mathcal{L}[y] = Y$$

$$\mathcal{L}[y'' + 10y' + 24y] = \mathcal{L}[f]$$

$$s^2Y - s + 10sY - 10 + 24Y = F(s) \quad \text{(Tabell)}$$

$$Y(s^2 + 10s + 24) = F(s) + s + 10$$

$$Y = \frac{F(s)}{s^2 + 10s + 24} + \frac{s + 10}{s^2 + 10s + 24}$$

$$Y = \overbrace{F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 10s + 24}}^{\text{Förbered. för faltning}} + \frac{s + 10}{s^2 + 10s + 24}$$

$$\frac{1}{s^2+10s+24} \to -\frac{1}{2}e^{-6t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \quad \text{(Part.bråk)}$$

$$\frac{s+10}{s^2+10s+24} \to -2e^{-6t} + 3e^{-4t} \quad \text{(Part.bråk)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = f(t) * \left(-\frac{1}{2}e^{-6t} + \frac{1}{2}e^{-4t}\right) - 2e^{-6t} + 3e^{-4t} \quad \text{(Faltn.sats)}$$

Extraövning

Bestäm $(f \star g)(t)$, om $f(t) = \sin t$ och $g(t) = \cos t$.

Utför kalkylerna

- med definitionen $(f \star g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx$
- med faltningssatsen

Svar: $\frac{1}{2} t \sin t$

Egen övning

Lös BV-problemet

$$y'(t) + \int_0^t y(x)\,dx = \sin t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad y(0) = 1.$$

Svar: $y(t) = \frac{t}{2}\sin t + \cos t, \quad t \in \mathbb{R}_+$