Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 3

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

22 januari 2016

Seminarium 1

Den femte lektionen 26/2 2016 ägnas åt Seminarium 1. Uppgifterna är publicerade på Fronter. Lös dem i förväg och vi diskuterar dem under seminariet.

Lekt 2

- Lös ekvationen

$$z^2 + 2(1 - i)z = 3(7 - 6i)$$

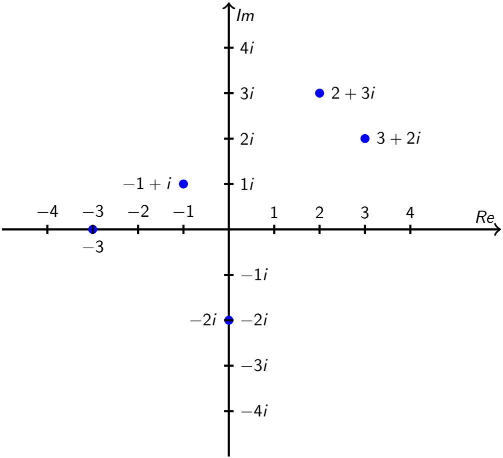
Det komplexa talplanet

Eftersom komplexa tal kan representeras som ett talpar $z = (a, b)$, ter det sig naturligt att representera z som en punkt i det komplexa talplanet.

Den norsk-danske lantmätaren Caspar Wessel (1745-1818), erkänns idag allmänt som upphovsmannen till tanken att representera komplexa tal som punkter i ett koordinatsystem med realdelen av talet på den vågräta axeln och imaginärdelen på den lodräta axeln.

Wessel förde fram denna tanke i en artikel, publicerad 1799. Tyvärr förblev Wessels arbete relativt okänt fram till 1897, då en fransk översättning av Wessels artikel publicerades.

Wessels idé



De reella talen, (de som har saknar imaginärdel), kommer att ligga på x-axeln, t. ex. talet -3 i figuren. Punkterna på y-axeln representerar de tal som saknar realdel (och benämns rent imaginära), t.ex. talet -2i i figuren.

Exempel

Om $z = 4 + i$, rita i det komplexa planet de punkter som svarar mot talen

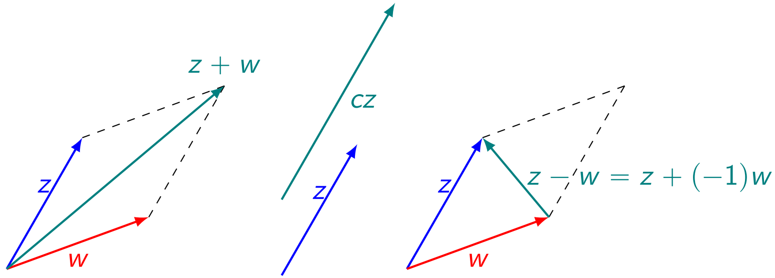
- z
- $\overline{z}$
- $-z$

Extra: Om $z = 4 + i$, rita i det komplexa planet de punkter som svarar mot iz.

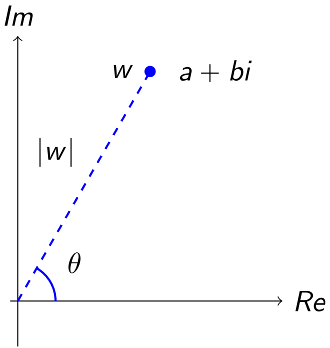
Räkneoperationer i komplexa talplanet

Det råder ett intimt samband mellan de komplexa talen och vektorbegreppet, mycket tack vare vår vän Wessel, som behandlade komplexa tal som vektorer (utan att använda benämningen vektor).

- Addition, (Parallellogramregeln)
- Multiplikation med skalär,
- Subtraktion $z - w = z + (-1)w$



Polär form



Den *polära formen* av $w = a + bi$ är ett uttryck av typen

$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad .$$

Det reella talet θ kallas *argumentet för w* och betecknas $\arg w$.

Anmärkning

- *Det icke-negativa reella talet r är en alternativ beteckning för* $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$. *($|w|$ är avståndet mellan w och origo.)*
- *Argumentet är inte entydigt bestämt, utan bestäms så när som på multiplar av 2π.*
  Följande gäller:

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} |z| &= |w|, \\ \arg z &= \arg w + n \cdot 2\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Geometrisk tolkning

- Vid multiplikation av två komplexa tal z och w multipliceras beloppen och adderas argumenten:

$$\begin{cases} |z\,w| &= |z|\,|w|, \\ \arg(z\,w) &= \arg z + \arg w. \end{cases}$$

- Vid division av två komplexa tal z och w divideras beloppen och subtraheras argumenten:

$$\begin{cases} |z/w| &= |z|/|w|, \\ \arg(z/w) &= \arg z - \arg w. \end{cases}$$

Exempel

Skriv på polär form

1. $z = 2 + 2i$,
2. $z = 1 - i$,
3. $z = (\sqrt{3} - i)(2 + 2i)$,
4. $z = \dfrac{1 - i}{1 + i}$.

Lekt 1 $w = a + bi$. Beräkna $i \cdot w$. Geometrisk tolkning?

Potenser med komplex exponent

Vi introducerar nu en förkortad beteckning för den polära formen $\cos\theta + i\sin\theta$, som har absolutbelopp 1 och argument θ:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}, \\[2ex] e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, \\[2ex] \textit{Eulers formler:} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \\[2ex] \textit{de Moivres formel:} \\[2ex] \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \\[2ex] \Leftrightarrow \\[2ex] (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \end{cases}$$

Konsekvens

Den *polära formen* av w är ett uttryck av typen

$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\,\theta}.$$

Vi kan nu bekvämt uttrycka multiplikation och division.

$$z = r_1(\cos\theta + i\sin\theta) = r_1\,e^{i\,\theta}$$
$$w = r_2(\cos\phi + i\sin\phi) = r_2\,e^{i\,\phi}$$
$$zw = r_1 r_2\,e^{i\,\theta}\,e^{i\phi} = r_1 r_2\,e^{i\,(\theta+\phi)}$$
$$\frac{z}{w} = \frac{r_1\,e^{i\,\theta}}{r_2\,e^{i\phi}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i\,(\theta-\phi)}$$

Avslutande exempel

Bestäm på formen $z = re^{i\theta}$

1. $z_1 = 2 + 2i$,
2. $z_2 = 1 - i$,
3. $z_1 \cdot z_2$,
4. $z_3 = i\sqrt{3} - 1$.