Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 4

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

22 januari 2016

Lekt 3

- Vad är beloppet av $e^{i\phi}$ om $\phi \in \mathbb{R}$?
- Bestäm belopp och argument för talet

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$$

Belopp: $\sqrt{2}$, argument $\frac{\pi}{12}$

Den binomiska ekvationen $z^n = w, n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$.

Från föregående lektion minns vi den förkortade beteckningen för den polära formen $\cos\theta + i\sin\theta$, som har absolutbelopp 1 och argument θ:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}, \\ e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, \\ \textit{de Moivres formel:} \\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \\ \Leftrightarrow \\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \end{cases}$$

Vi skall se på en metod för att lösa ekvationen $z^n = w$, där n är ett positivt heltal. Grundtanken är att överföra bägge led i ekvationen på polär form.

Exempel

Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$z^3 = 8i. \tag{1}$$

Lösningsförslag

- Gör ansatsen $z = r\,e^{i\theta}$ och skriv H.L. på polär form:

$$z = r\,e^{i\theta},$$
$$8i = 8\,e^{i\pi/2}.$$

- Enligt de Moivres formel kan (1) skrivas

$$r^3\,e^{i3\theta} = 8\,e^{i\pi/2}.$$

Detta är ekvivalent med

$$\begin{cases} r^3 & = 8, \\ 3\theta & = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r & = 2, \\ \theta & = \dfrac{\pi}{6} + n \cdot \dfrac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

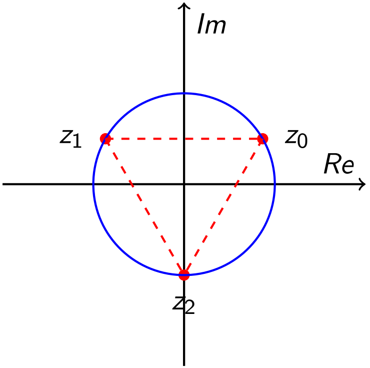
- De olika lösningarna är alltså

$$z_n = 2\, e^{i\,(\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3})}, \qquad n = 0, 1, 2,$$

dvs. $z_0 = \sqrt{3} + i$, $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -2i$.

Anmärkning

Man konstaterar generellt, att rötterna z_n utgör hörn i en regelbunden n-hörning (i ovanst. exempel en liksidig triangel), inskriven i en cirkel med radie 2.
Om cirkeln har radie 1 (enhetscirkeln), kallas lösningarna *de n:te enhetsrötterna*.



Avslutande exempel

(a) Lös ekvationen

$$(z - 3 + i)^4 = -16.$$

Svaret skall anges på rektangulär form $a + bi$.

(b) Skriv $(1 - i\sqrt{3})^5$ på rektangulär form med hjälp av polär form.

Lösningsförslag, (a)

Sätt $w = z - 3 + i$.
Gör ansatsen $w = r\, e^{i\theta}$ och skriv H.L. på polär form:

$$w = r\, e^{i\theta},$$
$$-16 = 16\, e^{i\pi}.$$

$$r^4\, e^{i4\theta} = 16\, e^{i\pi}$$
$$r^4 = 16, \qquad 4\theta = \pi + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
$$r = 2, \qquad \theta = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

De olika lösningarna är alltså

$$w_n = 2\,e^{i\,(\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2})}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

På rektangulär form får vi

$$w_0 = 2 \cdot \left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad w_1 = 2 \cdot \left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$
$$w_2 = 2 \cdot \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad w_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

Forts.

Med $z_n = w_n + 3 - i$ får vi slutligen

$$z_0 = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot i + \sqrt{2} + 3, \quad z_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot i - \sqrt{2} + 3$$
$$z_2 = \left(-\sqrt{2} - 1\right) \cdot i - \sqrt{2} + 3, \quad z_3 = \left(-\sqrt{2} - 1\right) \cdot i + \sqrt{2} + 3$$

Läs och lös på egen hand

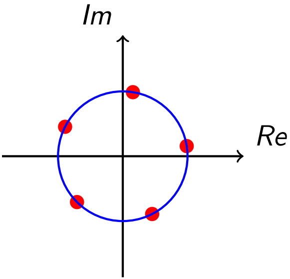
Lös ekvationen $z^5 = 1 + i$ och markera rötternas läge i det komplexa talplanet.

Lösningsförslag–tjuvkika inte

Vi finner att $1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4}$. Med de Moivres formel får vi att

$$z_k = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{i\theta_k}\ ,\ k=0,\ldots,4 \quad ,$$

där $\theta_k = \dfrac{\pi}{20} + k\cdot\dfrac{2\pi}{5}$. Vi markerar de fem rötternas positioner i det komplexa talplanet: Rötterna ligger jämnt fördelade på periferin av en cirkel med radien $\sqrt[10]{2}$.



Rötterna ligger jämnt fördelade på periferin av en cirkel med radien $\sqrt[10]{2}$.

Lös på egen hand

(1.) Bevisa formlerna

$$4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta,$$
$$4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta.$$

(2.) **(a)** Uttryck $\cos 4\theta$ som ett polynom i $\cos\theta$.
(b) (*) Visa att vinkeln mellan vektorerna $z_1 = 5 + 14i$ och $z_2 = 2 + 3i$ är $\arctan(1/4)$.

Svar: 2(a) $8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$