Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 6

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

27 januari 2016

Differentialekvationer

När man studerar teknik/naturvetenskap, möter man ofta matematiska modeller som ett försök att beskriva diverse föränderliga fenomen inom dessa discipliner. Modellerna innehåller inte sällan ekvationer, där man återfinner derivator av en obekant funktion $y(x)$, där y kallas den beroende variabeln, medan x benämns den oberoende variabeln.

Definition

Med en ordinär differentialekvation av ordning n menas en ekvation som innehåller en funktion $y(x)$ och dess derivator upp till ordning n.

Exempel

Antag att $y = e^{x^2}$. *Då gäller att* $y' = 2xe^{x^2}$, *eller*

$$y' = 2xy \quad , \tag{1}$$

om vi ersätter e^{x^2} *med* y. *Uttrycket (1) ovan är alltså exempel på en första ordningens differentialekvation.*

Begynnelsevärdesproblem

Lösningen till en differentialekvation, den allmänna lösningen, är ur ett praktiskt perspektiv tämligen ointressant.

Man är mer intresserad av att lösa en differentialekvation med föreskrivna villkor – villkor som bestämmer egenskaperna hos $y(x)$ och dess derivator i en viss punkt x_0, s.k. begynnelsevärden.

Anm Ibland föreskrivs ytterligare villkor, s.k. randvillkor.

Lösningar till differentialekvationer

När man söker lösningen till en differentialekvation, exempelvis $y' = 2x$, söker man alla funktioner $y(x)$ som har derivatan $y'(x) = 2x$.

Vi misstänker att den lösningen måste vara $y(x) = x^2 + C$, där C är en godtycklig reell konstant. Kontrollderivering ger nämligen $y' = 2x + 0$. Vår misstanke var uppenbarligen korrekt!

En differentialekvation kan alltså ha många, ja oändligt många, lösningar.

Exempel

Beskriv grafiskt lösningen till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = x - y \quad .$$

Lösningsförslag

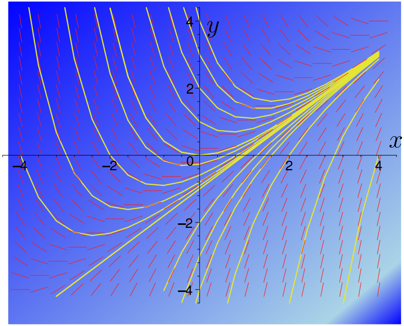
Snart kommer vi att lösa denna typ av differentialekvation med exakta metoder. För tillfället nöjer vi oss med att konstatera att ekvationens lösningar kan skrivas

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + x - 1 \quad , \tag{2}$$

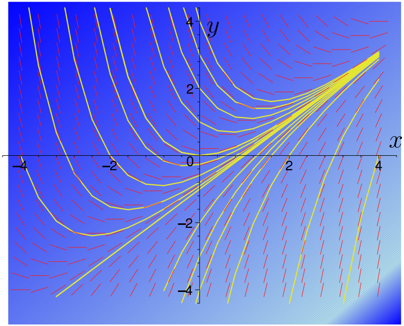
där C är en godtycklig reell konstant.

Lösningskurvor

I figuren är några av lösningskurvorna, s.k. partikulärlösningar, ritade. Dessa kurvor har uppkommit genom att vi i (2) satt in olika värden på konstanten C.



Om man skulle rita samtliga lösningskurvor – den allmänna lösningen – så innebär det att hela figuren skulle fyllas, vilket också antyds i vår figur.



Vi eftersträvar som regel att ur den allmänna lösningen finna den partikulärlösning som uppfyller vissa föreskrivna villkor, s.k. begynnelsevillkor eller randvillkor. Villkoren innebär geometriskt, att vår lösningskurva skall passera genom en föreskriven punkt.

Exempel

1. Bestäm alla funktioner $y(x)$, vars derivata är $\cos x$.
2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x} & = & 0 \\ y(1) & = & 5 \end{cases}$$

Riktningsfält

En viktig geometrisk tillämpning av en första ordningens ordinär differentialekvation $y' = g(x, y)$ är begreppet *riktningsfält*.
Vad har funktionen $g(x, y)$ för geometrisk tolkning?

- I gitterpunkten (x, y) i planet har lösningskurvans tangent **riktningskoefficienten** $g(x, y)$.
- Genom gitterpunkterna ritas linjesegment med riktningskoefficienter $g(x, y)$.
- Mängden av linjesegment bildar ett riktningsfält svarande mot differentialekvationen.

Exempel

Konstruera riktningsfältet till ekvationen

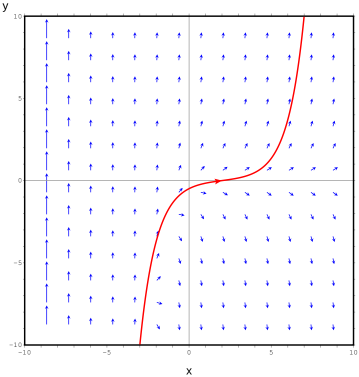
$$y' = e^{-x} + y \tag{3}$$

för $-10 \leqslant x \leqslant 10$, $-10 \leqslant y \leqslant 10$. Konstruera även lösningskurvan genom punkten $(2, 0)$ med hjälp av riktningsfältet.

Lösningsförslag

Vi markerar ett antal gitterpunkter. Genom gitterpunkterna (x, y), ritas linjesegment med riktningskoefficienter $e^{-x} + y$. Efter litet arbete framträder riktningsfältet.

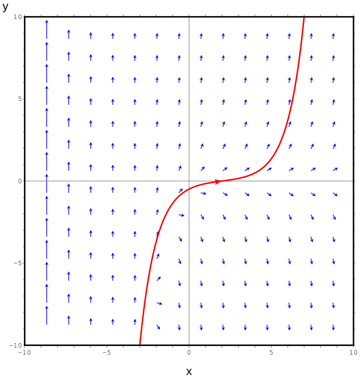
Då har vi möjlighet, med stöd av riktningsfältet, att konstruera den efterfrågade lösningskurvan.



Anmärkning

Vi skall inom kort titta på exakta metoder för att kunna lösa ekvationer av typ (3).

Det visar sig att lösningskurvan (röd graf) genom punkten $(2, 0)$ har ekvationen $y(x) = \frac{1}{2}\big(exp(x - 4) - exp(-x)\big)$.



Eulers metod–att lösa BVP numeriskt

Vi skall tillämpa begreppet riktningsfält i en enkel men viktig numerisk lösningsmetod.

Uppgift Bestäm en approximativ lösning till *begynnelsevärdesproblemet* (BVP)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = g(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Metodik

Anta att funktionen $g(x, y)$ är definierad för $x \in [a, b]$. Vi önskar en ungefärlig bestämning av den lösningskurva $y = y(x)$, som passerar genom punkten (x_0, y_0).

1. Ersätt $y(x)$ *lokalt* med några termer ut dess Taylor-serie (vi går igenom Taylorserier senare):

$$y(x+h) = y(x) + h\,y'(x) + \frac{1}{2!}h^2\,y''(x) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}h^n\,y^{(n)}(x) + \ldots$$

2. Termerna till och med första ordningen utgör den s.k. *Eulers metod*.

Eulers metod

Lösningen till BVP (4), approximeras över intervallet $[a, b]$ av det polygontåg med hörn i punkterna (x_k, y_k) , där y_k bestäms av rekursionsformeln (sätt $a = x_0$, $b = x_n$):

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot g(x_k, y_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Punkterna x_k får vi genom

$$x_k = x_0 + kh, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Här är *steglängden* $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Avslutande exempel

Lös med Eulers metod begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= y + xy, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

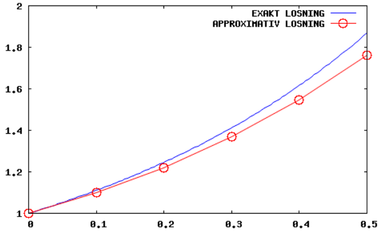
på $[0, 0.3]$ med steglängd $h = 0.1$.

Lösningsförslag

Det är praktiskt att beskriva fortskridandet på tabellform. Här redovisar vi en körning med $h = 0.1$.

x	y	g(x,y)
0	1,00	1,00
0,1	1,10	1,21
0,2	1,22	1,47
0,3	1,37	1,78
0,4	1,55	2,16
0,5	1,76	-0,76

Vi plottar Euler-grafen (polygontåget, röd graf) med motsvarande (analytiska) lösningskurva $y(x)$ (blå graf).



Geometrisk tolkning: Vi approximerar lösningskurvan $y(x)$ nära (x_0, y_0) med dess tangent.

Något om feltyper

Vilken noggrannhet kan man förvänta sig från Eulers metod?
Man brukar diskutera två feltyper:

Lokalt trunkeringsfel P.g.a. att vi *trunkerat* ("kapat") Taylorserien blir det *lokala felet* ungefär proportionellt mot steglängden i kvadrat.

Ackumulerat fel Det ackumulerade felet blir antal steg ($= n$) gånger trunkeringsfelet. Men eftersom $n = K \cdot \frac{1}{h}$, blir det *ackumulerade (globala) felet* ungefär proportionellt mot steglängden.

Anmärkning

Eftersom det globala felet i Eulers metod är "av ordning h", måste man använda extremt korta steg för att erhålla hygglig noggrannhet.

Detta har gett upphov till arbetet med att utveckla noggrannare metoder, exempelvis *Heuns metod* eller *Runge-Kuttas metod*.

Läs t.ex. D. Kincaid and W. Cheney, *Numerical Mathematics and Computing, 6th ed* (Thomson Brooks/Cole) för djupare inblickar i diverse numeriska metoder.