Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 7

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

27 januari 2016

Lekt 6

- Låt $y(x)$ vara lösningen till BVP

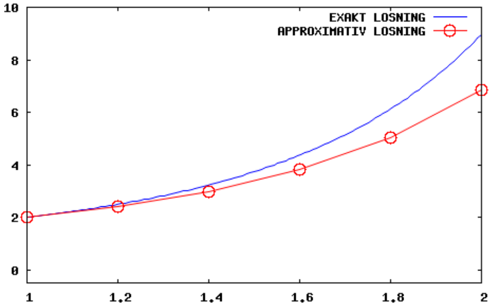
$$\frac{dy}{dx} = xy, \quad y(1) = 2.$$

Bestäm med Eulers metod, steg $h = 0.2$, ett närmevärde till $y(2)$.

Lösningsförslag

x	y	$y' = g(x, y)$	korr$= h \cdot y'$
1	2,00	2,00	0,4
1,2	2,40	2,88	0,576
1,4	2,98	4,17	0,83328
1,6	3,81	6,09	1,2189696
1,8	5,03	9,05	1,810169856
2	6,84		

Exakt lösn.kurva $y(2) \approx 8.96$



Matematisk modellering

Man ställs ibland inför problemet att göra en matematisk formulering utgående från en beskrivning av något fenomen. Man åstadkommer en matematisk modell.

Som nämnts tidigare, stöter ofta man på storheter som förändras med tiden. Dessa antaganden uttrycker vi då med hjälp av differentialekvationer. Vi skall betrakta några huvudtyper.

Tillväxtproblem

En ofta använd modell för att beskriva **populationstillväxt**, bygger på antagandet att hastigheten, med vilken populationen $P(t)$ tillväxer, är proportionell mot populationens storlek vid tiden t:

$$\frac{dP}{dt} = kP \ , \ k > 0.$$

En annan typ av tillväxtproblem är **radioaktivt sönderfall**. Låt $y(t)$ vara mängden radioaktiv substans vid tiden t. Substansen antas sönderfalla med en hastighet som är proportionell mot mängden radioaktiv substans vid tiden t:

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y \ , \ \lambda > 0.$$

Fysikaliska problem

I problem som rör **avsvalning**, brukar följande antagande utnyttjas: En kropps temperatur $T(t)$ sjunker med en hastighet, som är proportionell mot differensen mellan kroppens och omgivningens temperatur T_m:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \ , \ k > 0.$$

Mekaniska problem

I mekaniska sammanhang stöter man ibland på följande problem:

Exempel

En person kastar en sten uppåt. Stenens begynnelsehastighet är v_0 m/s. Dess massa är m kg. Försumma luftmotståndet.

Ställ upp ett begynnelsevärdesproblem som beskriver händelsen matematiskt.

Lösningsförslag

Newtons kraftekvation säger, att nettokraften som verkar på ett föremål är proportionell mot föremålets acceleration. Vi gör följande antaganden:

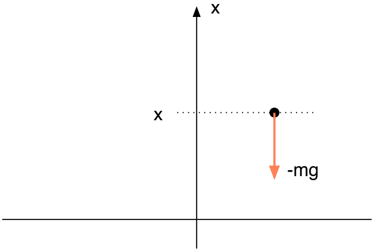
Orientering Positiv riktning uppåt.

Läget Läget vid tiden t betecknas $x(t)$.

Hastigheten Hastigheten $v(t)$ vid tiden t är lika med tidsderivatan av läget: $v(t) = \dot{x}$. ($\dot{x}$ används ofta som tidsderivata)

Accelerationen Accelerationen $a(t)$ vid tiden t är lika med tidsderivatan av hastigheten: $a(t) = \dot{v} = \ddot{x}$.

Vi betraktar stenen efter det att den har lämnat kastarens hand. Ingen annan kraft än tyngdkraften verkar på stenen. Tyngdkraften är nedåtriktad.



Newtons kraftekvation säger följande:

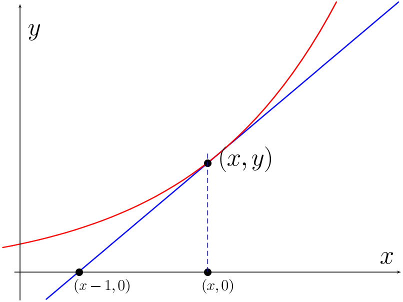
$$m \cdot \dot{v} = \underbrace{-}_{\text{motsatt riktad}} mg \quad ,$$

varav

$$\begin{cases} \dot{v} & = & -g \\ v(0) & = & v_0 \end{cases}$$

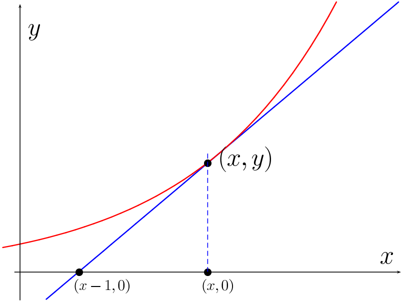
Geometriska problem

Antag att en kurva har följande egenskap: Kurvans tangent i tangeringspunkten (x, y) skär x-axeln i skärningspunkten $(x-1, 0)$. Bestäm den differentialekvation som svarar mot kurvan.



Riktningskoefficienten för tangenten kan uttryckas på två sätt:

- Ändringskvoten $\dfrac{y}{x-(x-1)}$,
- $y'(x)$.



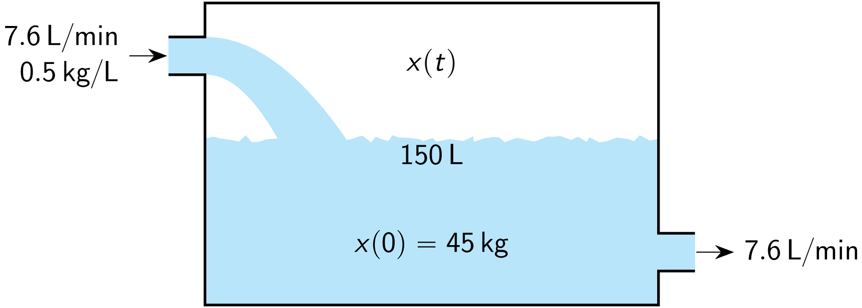
Ovanstående resonemang leder till differentialekvationen

$$y' = y \quad .$$

Blandningsproblem

En behållare innehåller från början 150 l sockerlösning med koncentrationen 0.3 kg socker per liter. Vid tiden $t = 0$ börjar sockerlösning med koncentrationen 0,5 kg socker per liter strömma in i behållaren med flödet 7,6 liter per minut.
Den väl blandade lösningen börjar samtidigt att avtappas från behållaren med samma flöde som inströmmande lösning, så att volymen i behållaren hålls konstant.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver processen.

Vad är givet i problemet?



Antag att $x(t)$ är mängden socker i kg vid tiden t min.

Lösning flödar in i behållaren med flödet 7.6 (liter/min) och med sockerhalt 0.5 (kg/liter).

Ur avloppet strömmar lösning med flödet 7.6 (liter/min) och med sockerhalt $x(t)/150$ (kg/liter)

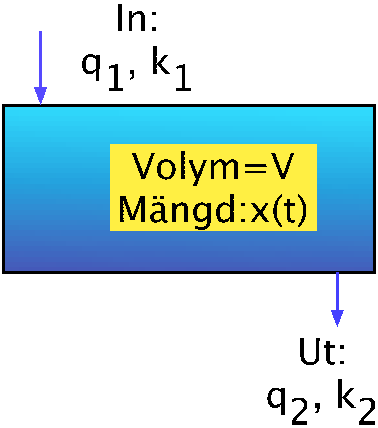
Lite mer generellt

"Input rate" är produkten mellan inflöde och inkommande halt:

$$q_1 \cdot k_1 \quad (\text{kg/min})$$

Vårt exempel: $0,5 \cdot 7,6 = 3,8$ kg/min. "Output rate" är på liknande sätt

$$q_2 \cdot k_2 = 7,6 \cdot \frac{x(t)}{V} = 7,6 \cdot \frac{x(t)}{150}.$$



Matematisk formulering

Den matematiska formuleringen av problemet är:

$$\frac{dx}{dt} = \quad (\text{"Input rate" } - \text{ "Output rate"})$$
$$= 3,8 - \frac{7,6 \cdot x}{150}, \quad \text{BV: } x(0) = 45.$$

Linjära differentialekvationer av första ordningen

Definition

En differentialekvation på formen

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\,y = g(x), \tag{1}$$

där $f(x)$ och $g(x)$ är givna funktioner, kallas en *linjär differentialekvation av ordning 1*.

Lösningsmetodik

Den bärande tanken är att återföra (1) till den enkla ekvationen $\dfrac{dy}{dx} = h(x)$.

- Bestäm en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$.
- Multiplicera bägge led i (1) med den integrerande faktorn

$$e^{F(x)}.$$

Detta gör att (1) är ekvivalent med

$$\frac{dy}{dx}\, e^{F(x)} + f(x)\, y\, e^{F(x)} = g(x)\, e^{F(x)}.$$

- Vi konstaterar att vänsterledet är derivatan av produkten $y\,e^{F(x)}$. Detta medför att

$$y\,e^{F(x)} = \int g(x)\,e^{F(x)}\,\mathrm{d}x + C,$$

och kan slutligen lösa ut y explicit.

Anmärkning

$$\frac{dy}{dx}\,e^{F(x)} + f(x)\,y\,e^{F(x)} = \frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{F(x)}\right) \quad \text{(Kontrollera!)}$$

Avslutande exempel

Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} x^2 \dfrac{dy}{dx} + xy &= 1, \qquad x > 0, \\ y(1) &= 2. \end{cases}$$

Läs och lös på egen hand

Exempel

En behållare, som rymmer 20 liter, innehåller från början 10 liter rent vatten då man börjar fylla på med 2 liter förorenat vatten per minut. Det förorenade vattnet innehåller 2 mg av ett ämne A per liter.

Samtidigt som påfyllningen sker, avtappas 1 liter vatten per minut från behållaren. Hur många mg av ämnet A finns det i behållaren i det ögonblick då den just blivit full?

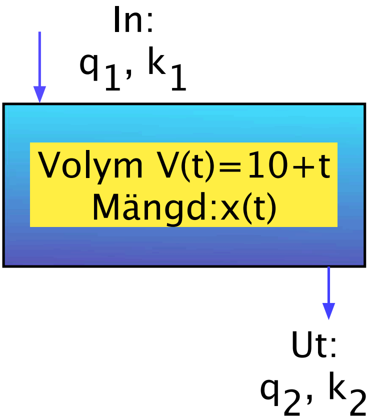
Förutsätt att vattnet i behållaren blandas väl under påfyllningen.

Lösningsförslag–tjuvkika inte

Antag att $x(t)$ är mängden förorening i mg vid tiden t min. Volymen i behållaren är ej konstant under processen. $V(t) = 10 + (2 - 1) \cdot t$. Behållaren är fylld efter 10 minuter.

Lösning flödar in i behållaren med flödet q_1 (liter/min) och med halten k_1 (mg/liter) förorening.

Ur avloppet strömmar lösning med flödet q_2 (liter/min) och med halt k_2 (mg/liter).

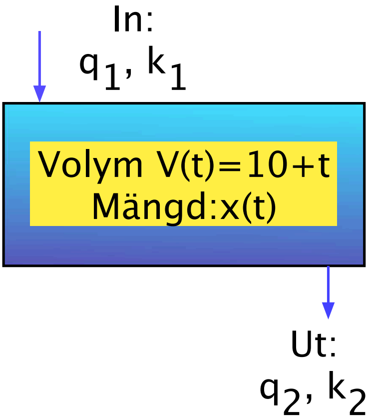


"Input rate" är produkten mellan inföde och inkommande halt:

$$q_1 \cdot k_1 \quad (\text{kg/min})$$

I siffror: $2 \cdot 2 = 4$ mg/min. "Output rate" är på liknande sätt

$$q_2 \cdot k_2 = 1 \cdot \frac{x(t)}{V(t)} = 1 \cdot \frac{x(t)}{10 + t}.$$



Matematisk modell

$$\frac{dx}{dt} = 4 - \frac{x}{10 + t},$$

BV: $x(0) = 0.$

Sökt: $x(10)$

Anmärkning–"överkurs"

Vi återvänder till ekvation (1). Multiplicera bägge led i (1) med en lämplig funktion $\sigma(x)$:

$$\sigma(x)\,\frac{dy}{dx} + \sigma(x)\,f(x)\,y = \sigma(x)\,g(x). \tag{2}$$

Sök en funktion $\sigma(x)$ med egenskapen att V.L. i (2) blir derivatan av produkten $\sigma(x)\,y$:

$$\frac{d}{dx}(\sigma(x)\,y) = \sigma(x)\,\frac{dy}{dx} + \sigma(x)\,f(x)\,y.$$

Vi får att

$$\sigma'(x)\,y + \sigma(x)\,y' = \sigma(x)\,y' + \sigma(x)\,f(x)\,y,$$

dvs

$$\sigma'(x) = \sigma(x)\,f(x).$$

Denna ekvation är separabel (Avsn 9.2, s. 387ff (FN)). Vi löser denna ekvation för σ och får

$$\ln|\sigma| = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C,$$
$$\sigma = A\,e^{F(x)},$$

där $A = \pm e^{C}$. Vi väljer $A = 1$ och känner förhoppningsvis igen den integrerande faktorn.