Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 8

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

29 januari 2016

Lekt 7

- Bestäm allmänna lösningen till

$$(x^2 - 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0, \quad x > 3.$$

Separabla ekvationer

Definition

En differentialekvation på formen

$$g(y)\,\frac{dy}{dx} = h(x), \tag{1}$$

där g och h är givna funktioner, kallas en separabel differentialekvation.

Lösningsmetodik

Ekvation (1) löser vi genom följande princip:

- Bestäm primitiva funktioner G och H till g respektive h.
- Ekvation (1) är ekvivalent med

$$\frac{d}{dx}\left(G(y(x))\right) = h(x). \quad \text{(Kedjeregeln i VL)}$$

- Vi får

$$G(y(x)) = \int h(x)\,\mathrm{d}x + C = H(x) + C.$$

Ibland (men inte alltid) kan man lösa ut $y(x)$ explicit. Ofta får man nöja sig med uttrycka lösningen på implicit form.

Hur gör man i praktiken?

Separera variablerna: y i VL, x i HL

$$g(y)\,\frac{dy}{dx} = h(x) \quad \text{(Förläng med } dx\text{)}$$

$$g(y)\,dy = h(x)\,dx \quad \text{(Integrera: map } y \text{ i VL, map } x \text{ i HL)}$$

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$$

$$G(y) = H(x) + C.$$

Exempel

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = 2x\, e^{-y}.$$

Knepigare exempel

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}(1+x^2) &= 2xy, \\ y(0) &= -1. \end{cases}$$

Lösningsförslag

- Dividera med $(1+x^2)y$ (separationssteget). För $y \neq 0$ är:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x}{1+x^2}$$

- Integrera bägge led.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

- Bestäm den allmänna lösningen y.

$$\ln|y| = \ln(1+x^2) + C \quad (y \text{ oftast implicit})$$
$$|y| = K(1+x^2), \quad \underline{K > 0},$$
$$y = K_1(1+x^2), \quad \underline{K_1 \neq 0}.$$

Anmärkning

$$|y| = K(1+x^2), \quad (K = e^C > 0),$$
$$y = K_1(1+x^2), \quad (K_1 = \pm e^C \neq 0).$$

- Bestäm K_1 med föreskrivet villkor.

  $K_1 = -1.$

  Sökt lösning:

  $y = -(1+x^2).$ (Hanteringen av konstanter är inte trivialt...)

Exempel

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2), \quad y(0) = 1.$$

Svårare exempel

En ideal gas uppfyller gasernas allmänna tillståndsekvation

$$pV = kT$$

där $p = p(t)$ är trycket, $V = V(t)$ är volymen och T (konstanta) temperaturen för gasen i fråga. k är en specifik gaskonstant. Volymflödet Q beräknas:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{kT}{p}\right) = -\frac{kT}{p^2} \cdot \frac{dp}{dt} \quad \text{(kedjeregeln)} \tag{2}$$

Problem

Antag att gasen i en ballong är ideal och hålls vid konstant temperatur T. Om trycket vid $t = 0$ är 10 tryckenheter och ballongen krymper med

$$\frac{dV}{dt} = -t^3, \tag{3}$$

bestäm trycket $p = p(t)$ i ballongen som funktion av tiden.

Lösningsförslag

Vi sätter in Ekv. (3) i Ekv. (2):

$$-\frac{kT}{p^2}\cdot\frac{dp}{dt} = -t^3, \quad \text{separabel ekvation.}$$

$$\frac{1}{p^2}\cdot\frac{dp}{dt} = \frac{t^3}{kT}$$

$$-\frac{1}{p} = \frac{t^4}{4kT} + C \quad \text{(allmän lösning)}$$

$$\text{Villkor: } p(0) = 10 \Rightarrow \qquad -\frac{1}{10} = C$$

$$\frac{1}{p} = -\frac{t^4}{4kT} + \frac{1}{10} \quad \text{(implicit)}$$

Sökt lösning:

$$p(t) = \frac{1}{\frac{1}{10} - \frac{t^4}{4kT}}$$

Avslutande exempel

Ett eluppvämt hus råkar ut för ett längre strömavbrott. Eftersom uppvärmningen är ur funktion, är det rimligt att anta att *temperatursänkningen per tidsenhet är proportionell mot differensen mellan inner- och yttertemperatur*.

Anta att yttertemperaturen är konstant, -10°.

Om innertemperaturen var 20° när värmesystemet trädde ur funktion och 15° efter 2 timmar, vad är då temperaturen i huset efter 1 dygn? Svara med en decimal.