Matematik III M0039M, Lp 3 2016

Lektion 1

Staffan Lundberg

Luleå Tekniska Universitet

18 januari 2016

Kursinformation m.m.

Examinator:	Staffan Lundberg.
Övriga lärare:	Eva Lövf (Skellefteå).
	Ove Edlund (Adobe Connect).
	Thomas Edlund (Filipstad).
Telefon:	0920-49 18 69.
Rum:	E882.
E-post:	`lund@ltu.se`

Kursen är indelad i tre block:

- Komplexa tal,
- Differentialekvationer,
- Serier och Transformer.

Mål/Förväntat studieresultat

Efter kursen skall studenten

1. ha ytterligare fördjupat sina kunskaper och färdigheter i de centrala matematiska begrepp, metoder och logiska strukturer som krävs för att självständigt kunna arbeta som högskoleingenjör
2. ha kunskaper i räkning med komplexa tal, första och andra ordningens ordinära differentialekvationer samt transformteori
3. ha utvecklat sin förmåga till kritisk granskning, planering och matematisk modellering
4. ha fördjupat sina kunskaper i handhavandet av moderna datorstödda beräknings- och algebrasystem

Kurslitteratur, omfattning

I M0039M används

- Forsling-Neymark: *Matematisk analys en variabel*. Liber, andra upplagan, ISBN 978-91-47-10023-1,
- Sollervall/Styf: *Transformteori för ingenjörer*. Studentlitteratur, senaste upplagan,
- Pękalska, E: *Introduction to Matlab* (finns för nerladdning).

Lektioner: 31 pass (om vardera 90 min.), Laborationer 2 pass, Delprov 1 pass.

Seminarier

I kursen ingår tre schemalagda problemlösningsseminarier. Syftet är att förbättra dina färdigheter i enskilt problemlösande. Dessutom erbjuds möjlighet att öva din förmåga att i grupp förklara dina lösningar.

Seminarieuppgifterna delas ut en vecka innan seminariet. Var och en löser problemen på egen tid och kommer till seminarierna för att diskutera sina lösningar.

Referenslitteratur

Under laborationsmomentet kan följande litteratur vara till hjälp.

- Gilat: *MATLAB, An Introduction With Applications*. John Wiley & Sons, Inc, third edition.
- Jönsson, P.: *MATLAB–beräkningar inom teknik och naturvetenskap*, tredje upplagan, Studentlitteratur, ISBN 9789144069265.

Examination

- Skriftlig tentamen. Sex uppgifter á 5 poäng.
- Ett delprov. Max 2 bonuspoäng. Maxpoäng (tentamen inkl. bonuspoäng): 32. Gräns för betyget Godkänd: 14.
- Hjälpmedel på delprov/tentamen: Tabeller. Miniräknare.
- 2 laborationer.

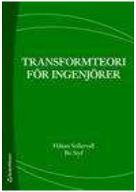
Senaste inlämning för den skriftliga redogörelsen är för

- Laboration 1: 19 februari 2016,
- Laboration 2: 10 mars 2016.

Observera Samtliga laborationer skall vara godkända senast 23 mars 2016. Eventuella kvarvarande laborationer/returer efter detta datum underkänns och laborationerna måste göras om vid nästkommande kurstillfälle VT 2017.

Lärobok i transformteori

Fr.o.m. Lekt 19 används Sollervall-Styf: Transformteori för ingenjörer.
ISBN: 9789144022000
Upplaga: 3, Studentlitteratur
Beställ i god tid.



Kursregistrering–Viktig Information

- Du måste själv ta initiativ till kursregistrering via Studentportalen.
- På *måndag den 18/1* börjar registreringsperioden.
- Kursregistrering gör du normalt under läsperiodens fem första dagar.

Komplexa tal

Redan för ungefär 3500 år sedan kände babylonierna till hur man kan lösa en andragradsekvation med hjälp av rotutdragning. Däremot behärskade de inte tekniken för att lösa en tredjegradsekvation. Den italienske läkaren och matematikern *Geronimo Cardano (1501-1576)* publicerade 1545 en lösningsmetod för tredje och fjärde ordningens ekvationer.

Ett av Cardanos exempel bestod i att lösa det "omöjliga problemet" att lösa ekvationen $x(10 - x) = 40$, eller i hans terminologi:"*dela talet 10 i två delar, vilkas produkt är 40*". Cardano fick så småningom fram att

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Han multiplicerade samman de två lösningarna, och erhöll som förväntat

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40.$$

För att kunna förstå sin kalkyl, införde han det "fiktiva talet". Cardano skriver:"Jag förstår inte min kalkyl, vilken är lika raffinerad som oanvändbar".

Cardanos tal kom senare (*Renatus Cartesius* på 1600-talet) att kallas imaginära tal. Anledningen till Cartesius (1596-1650) benämning var, att dessa tal inte "fanns", dvs de gick inte att tolka på ett konkret sätt.

Mystiken kring de komplexa talen skulle inte skingras förrän den norsk-danske matematikern *Caspar Wessel (1745-1818)* kunde ge en geometrisk tolkning av de komplexa talen. Wessel publicerade 1799 en artikel där han representerar komplexa tal som punkter i ett koordinatsystem med den reella delen av talet på ena axeln och den imaginära delen på den andra.

De komplexa talen, som i början ansågs vara fantasifoster, används idag inom många tillämpningar, exemplelvis mekanik och elektricitetslära.

Definition

Ett komplext tal z är ett uttryck på formen

$$z = (a, b) = a + bi$$

där a och b är reella tal och $i = \sqrt{-1}$ kallas den imaginära enheten.

Anmärkning

$a = Re\ z$ *kallas realdelen av* z, $b = Im\ z$ *kallas imaginärdelen av* z.
Man räknar med de komplexa talen på samma sätt som med de reella, men kom ihåg att $i^2 = -1$.

Räkneregler

Summa Denna operation svarar geometriskt mot vektoraddition (parallellogramregeln).

Differens Subtraktionen $z - w$ mellan de komplexa talen z och w är

$$z - w = z + (-1)w.$$

Produkt I Produkt mellan ett komplext tal z och ett reellt tal c har en omedelbar ekvivalens i att multiplicera en vektor med en skalär.

Produkt II Produkten zw mellan de komplexa talen $z = (a, b) = a + bi$ och $w = (c, d) = c + di$ definieras som det komplexa talet

$$zw = (ac - bd, ad + bc) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Exempel

(1) Antag att $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -4 + i$, $z_3 = 3 - i$, $z_4 = 2 - i$. Beräkna

- **(a)** $z_1 + z_2$,
- **(b)** $z_1 - z_3$,
- **(c)** $z_1 z_4 - z_3^2$,

(2) Låt $w = x + yi$. Beräkna $i \cdot w$. Geometrisk tolkning?

Konjugat, absolutbelopp

Definition

Om $z = a + bi$, så kallas $\overline{z} = (a, -b) = a - bi$ konjugatet till z.

För konjugering av komplexa talen z och w gäller:

1. $\overline{(\overline{z})} = z$,
2. $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$, (Användbar regel)
3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
4. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
5. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

Anmärkning

Alternativ beteckning för konjugatet: z^*.

Definition

Om $z = a + bi$*, så kallas* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *absolutbeloppet av* z*.*

För godtyckliga komplexa tal z och w gäller:

1. $|z| \geqslant 0,$
2. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, (Användbar regel)
3. $|z + w| \leqslant |z| + |w|,$
4. $||z| - |w|| \leqslant |z + w| \leqslant |z| + |w|,$
5. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$
6. $|z/w| = |z|/|w|.$

Exempel

(a) Låt $z = 3 - 2i$. Beräkna $|z|^2, z^2$ samt $|z^2|$

(b) Antag att $z = 2 - 3i$ resp. $w = 1 - 2i$. Bestäm

- **(i)** $\overline{z}$ och $\overline{w}$,
- **(ii)** $\overline{zw}$,
- **(iii)** $|z|$,
- **(iv)** $|z - w|$. Geometrisk tolkning?

(c) Tolka geometriskt mängden av alla punkter u i det komplexa talplanet som uppfyller villkoret

$$|u - 3i| = 2.$$

Division

Definition

Låt $z = a + bi$ *och* $w = c + di$ *, där* $w \neq 0$ *vara komplexa tal. Med* *kvoten* $\dfrac{z}{w}$ *menas det komplexa talet*

$$\frac{z}{w} = \frac{w^* z}{w^* w} = \frac{w^* z}{|w|^2}.$$

Avslutande exempel

1. Beräkna $\dfrac{3-7i}{-6+5i}$
2. Låt $z = 2+3i$. Beräkna $|z|^2, \quad z^2, \quad Re(z^2)$ samt $|z^2|$.