

M0039M, Lektionsuppgifter

Lektionsuppgift 2

Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$z^2 - (3 + i)z + (4 + 3i) = 0$$

Lektionsuppgift 3

Bestäm $(\sqrt{3} + i)^3$, med hjälp av polär form och någon av varianterna på deMoivres formel:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

eller

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$$

Lektionsuppgift 4

Bestäm alla komplexa nollställen till polynomet

$$f(z) = z^6 - 1.$$

Skriv sedan polynomet som en produkt av polynom med reella koefficienter. Varje faktor ska ha så lågt gradtal som möjligt.

Lektionsuppgift 6

Givet differentialekvationen

$$x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = 0$$

1. Ange ordningstalet hos differentialekvationen.
2. Avgör vilka av de följande uttrycken som löser differentialekvationen

i) $y(x) = x$

ii) $y(x) = x^2$

iii) $y(x) = x \ln x$

iv) $y(x) = x^2 \ln x$

3. Är de lösningar som man nu funnit i punkt 2, av typen "allmän lösning" eller "partikulärlösning"?
4. Går det att rita ett riktningsfält för denna differentialekvation?

Lektionsuppgift 7

Bestäm allmän lösning till differentialekvationen

$$\frac{1}{\cos x} y'(x) - y(x) = 1$$

genom att utnyttja att den är linjär, och använda integrerande faktor. Bestäm också en partikulärlösning så att villkoret $y(0) = 0$ är uppfyllt.

Lektionsuppgift 8

Bestäm allmän lösning till differentialekvationen

$$y' - x y^2 = x$$

genom att utnyttja att den är separabel.

Lektionsuppgift 9

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lektionsuppgift 10

Bestäm en partikulärlösning till

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 + 1$$

Lektionsuppgift 11

Lös differentialekvationen

$$y'' + 3y' + 2y = x e^{-x}$$

då $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

Lektionsuppgift 13

Avgör om följande generaliserade integral är konvergent eller divergent

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 3} dx$$

Lektionsuppgift 14

Givet (då $r \neq 1$)

$$\sum_{k=1}^n k r^k = 1r + 2r^2 + 3r^3 + \dots + n r^n = \frac{r(nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1)}{(r-1)^2}$$

Finns de värden på r för vilka

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^k$$

är konvergent, och bestäm seriens värde då den är konvergent.

Lektionsuppgift 15

Undersök med någon lämplig metod om de följande serierna konvergerar:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^3+k}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\ln(\frac{1}{k})}{k^2}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$

Lektionsuppgift 16

(a) Bestäm konvergensraden till potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k x^k$$

(b) Givet funktionen $y(x) = e^{-x} \cos x + 1$. Bestäm Taylorserien för $y(x)$ runt $x = 0$.

Lektionsuppgift 17

Använd Maclaurinutveckling för att bestämma gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x) - \sin x}$$

Lektionsuppgift 18

Differentialekvationen

$$y' - y = 0$$

har allmän lösning $y = C e^x$. Verifiera det genom att lösa differentialekvationen med potensseriemetoden, och se att du får Maclaurinutvecklingen av $c_0 e^x$.

Lektionsuppgift 19

Bestäm Laplacetransformen till

$$f(t) = 1 + 2t - t^2 + \sin t - 2 \cos t$$

Lektionsuppgift 20

Bestäm en funktion $f(t)$ med Laplace-transform

$$F(s) = \frac{4s + 4}{s^2(s + 2)}$$

Lektionsuppgift 21

- (a) Bestäm Laplacetransformen till $f(t) = e^{-3t}t^2$.
 (b) Bestäm $f(t)$ med invers Laplacetransform då

$$F(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

Lektionsuppgift 22

Använd invers Laplacetransform för att bestämma $f(t)$ då

$$F(s) = \frac{3s^2 + 12s + 18}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

Lektionsuppgift 23

Använd Laplacetransform för att lösa differentialekvationen

$$y'' + 3y' + 2y = 2$$

då $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.

Lektionsuppgift 24

Uttryck följande styckvisa funktion med Heavisides stegfunktion

$$f(t) = \begin{cases} t - t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Lektionsuppgift 25

Bestäm Laplacetransformen till

$$f(t) = \begin{cases} t - t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Lektionsuppgift 26

Använd Laplacetransform för att lösa följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' - 3x + 2y = 0 \\ y' - 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

dvs bestäm $x = x(t)$ och $y = y(t)$ som uppfyller ekvationen. Använd begynnelsevillkor $x(0) = 1$ och $y(0) = -1$.

Lektionsuppgift 27

Bestäm Laplacetransformen av

$$\int_0^t (t-x) \cos(2x) dx$$

Lektionsuppgift 28

Lös, för $t \geq 0$, integralekvationen

$$2 \cos(2t) = 2y(t) + 5 \int_0^t y(t-x) \sin(2x) dx$$