LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

OBSERVERA: DENNA TENTAMEN GÄLLER STUDENTER PÅ HÖGSKOLEINGENJÖRSPROGRAM

Tentamen i Matematik III Differentialekvationer, komplexa tal och transformteori

Kurskod	**M0039M**
Tentamensdatum	2014-03-25
Skrivtid	09.00-14.00

Totala antalet uppgifter: 6, max 30 p

Betygsgränser: **U**:0–13, **3**:14–19, **4**:20–25, **5**:26–30.

Resultatet meddelas på studentportalen.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare. Bifogad tabell.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt presenterade att de blir svåra att följa. Även endast delvis lösta problem kan ge poäng.
Enbart svar ger 0 poäng.

Institutionen för teknikvetenskap och matematik

Uppgift 1

(a) Det komplexa talet $z = 2 - i$ är en lösning till ekvationen

$$2z^3 - 5z^2 - 2z + 15 = 0.$$

Bestäm samtliga lösningar. (3 p)

(b) Antag att $w = (1 + i)^{10} + i^{45}$.

Bestäm $\mathrm{Im}(w)$. (2 p)

Uppgift 2

(a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 2\,e^{2x}.$$

Laplacetransformer får ej användas. (3 p)

(b) Lös för $x > 0$ begynnelsevärdeproblemet

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x^2}, \quad y(1) = 0$$

Laplacetransformer får ej användas. (3 p)

Uppgift 3

(a) Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$$

är konvergent eller divergent. (2 p)

(b) Bestäm

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{1 - e^{x^2}}$$

L'Hospitals regel får inte användas. (2 p)

Uppgift 4

(a) Bestäm en funktion $f(t), \quad t \geqslant 0$, med Laplacetransformen

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s}$$

(2 p)

(b) Bestäm Laplacetransformen för

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t, & 0 \leqslant t < 2, \\ 0, & 2 \leqslant t. \end{cases}$$

(3 p)

Uppgift 5

Lös med Laplacetransformation begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 2y' + y = \sin(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

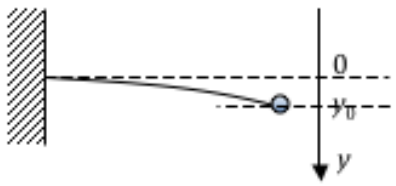
(5 p)

Uppgift 6

Lös en och endast en av följande uppgifter.

Uppgift 6.1

En platt fjäder (med obetydlig massa) är fäst i sin ena ända. Den andra ändan håller en massa, $m = 0{,}2$ kg, i form av en kula. Se figuren.



Vid jämvikt är massans vertikala läge $y_0 = 0,01$ m. Se figuren.
Låt $y = y(t)$ vara avvikelsen från nollnivån (obelastad fjäder) enligt figur.

Funktionen $y(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = mg - ky,$$

där $k > 0$ är fjäderkonstanten (N/m). Vid tidpunkten $t = 0$ ges massan en nedåtriktad initialhastighet om 0,2 m/s.

(a) Beräkna fjäderkonstanten k. (1 p)

(b) Bestäm massans vertikala läge $y(t)$ efter 0,05 sekunder. Svaret ges i **millimeter** och avrundas till 1 decimal. (4 p)

Använd tyngdfaktorn $g = 9,8$ m/s^2.
Anm: Om Du inte lyckats bestämma fjäderkonstanten i (a)-uppgiften, kan Du redovisa ett alternativt svar som innehåller den obekanta fjäderkonstanten k.

Uppgift 6.2

Lös, för $t \geqslant 0$, integralekvationen

$$y(t) = e^{-t} + \int_0^t \sinh(t-x)y(x)\,dx.$$

Anm sinh = sinus hyperbolicus. (5 p)

M0039 – 140326. Skisser

1(a) $z = 2 \pm i$ är lösningar

$\underbrace{(z-2-i)(z-2+i)}$ är faktorer.

$= z^2 - 4z + 5$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2z + 3 \\
\hline
z^2 - 4z + 5 & 2z^3 - 5z^2 - 2z + 15 \\
 & -(2z^3 - 8z^2 + 10z) \\
\hline
 & 3z^2 - 12z + 15 \\
 & -(3z^2 - 12z + 15) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$2z^3 - 5z^2 - 2z + 15 = (z^2 - 4z + 5)(2z + 3)$

Svar Samtliga lösningar: $z = -\frac{3}{2}, \; 2 \pm i$

1(b) $w = (1+i)^{10} + i^{45} =$

$= (2i)^5 + i \cdot (i^2)^{22} = 2^5 \cdot i \cdot i^4 + i =$

$= 32i + i = 33i$. Svar $\mathrm{Im}(w) = 33$

2(a) $y'' + y' - 6y = 2e^{2x}$

Homogen $r^2 + r - 6 = 0$ $\quad r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$r_1 = -3, \; r_2 = 2.$

Homogen lösn $y_H(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x}$

$\longrightarrow$

2 forts

Inhomogen Ansats $y_p = C \cdot x \cdot e^{2x}$

$\uparrow$

pga $y_H(x)$

$y_p' = C(e^{2x} + 2xe^{2x}) = Ce^{2x}(1+2x)$

$y_p'' = 2Ce^{2x}(1+2x) + 2Ce^{2x} = Ce^{2x}(2+4x+2)$

Insättning: $C\cancel{e^{2x}}(4x+4) + C\cancel{e^{2x}}(1+2x) - 6Cx\cancel{e^{2x}} = 2\cancel{e^{2x}}$

$\underline{C \cdot 4x} + 4C + C + \underline{2Cx} - \underline{6Cx} = 2$

$x\underbrace{(4C + 2C - 6C)}_{=0} + 5C = 2$, $C = \frac{2}{5}$, varav

$y_p = \frac{2}{5} x e^{2x}$

Sms allm lösn $y(x) = y_H + y_p =$

$= \underline{Ae^{-3x} + Be^{2x} + \frac{2}{5}xe^{2x}}$

2(b) $xy' + 2y = e^{-x^2}$ $(x \neq 0)$

$y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^{-x^2}}{x}$ linjär

integr. faktor $\exp(2\ln x) = x^2$.

$\frac{d}{dx}(yx^2) = xe^{-x^2}$,

$yx^2 = \int xe^{-x^2}dx = (-\frac{1}{2})e^{-x^2} + C$ allm. lösn. blir

$y(x) = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{C}{x^2}$

$\longrightarrow$

(2 forts) Villkor: $y(1)=0$

$$0 = -\frac{1}{2}e^{-1} + C \quad , \quad C = \frac{1}{2e}$$

Svar $y(x) = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{1}{2e}\cdot\frac{1}{x^2}$

---

3 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n!}{e^{n^2}}}_{a_n}$ positiv serie! $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Kvotkriteriet $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, e^{n^2}}{e^{(n+1)^2}\cdot n!} =$

$$= \frac{n+1}{e\cdot e^{2n}} \to \underline{\underline{0}} \text{ då } n\to\infty$$

Vi konstaterar: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, vilket innebär att serien är konvergent!

---

3 (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{1-e^{x^2}}$ (Typ $\frac{0}{0}$)

Kända ML-utvecklingar

$$\begin{cases} \cos(t) = 1 - t^2/2 + t^4/24 + \dots \\ \exp(t) = 1 + t + t^2/2 + t^3/6 + \dots \end{cases}$$ som ger oss

$$\frac{\cos(x)-1}{1-e^{x^2}} = \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)-1}{1-(1+x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^6))} = \frac{-\frac{1}{2}+O(x^2)}{-1+O(x^2)}$$

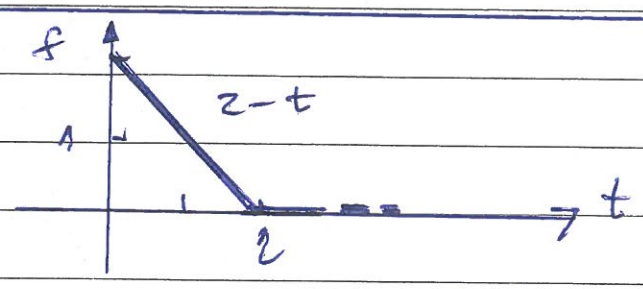
$\longrightarrow$

(3 forts) $\dfrac{\cos(x)-1}{1-e^{x^2}} \longrightarrow \dfrac{(-1/2)}{(-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ da $x \to 0$

4(a) $F(s) = \dfrac{s^2+s+1}{s^0+s} = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{s}$

$f(t) = \underline{\underline{\sin(t)+1}}$

4(b)



$f(t) = (2-t)\left(\theta(t) - \theta(t-2)\right)$ (avskirning)

$f = 2\theta(t) - 2\theta(t-2) - t\theta(t) + (t-2+2)\theta(t-2)$

$= 2\theta(t) - 2\theta(t-2) - t\theta(t) + (t-2)\theta(t-2) + 2\theta(t-2)$

$\mathcal{L}\{f\} = \dfrac{2}{s} \cancel{- 2e^{-2s}\cdot\dfrac{1}{s}} - \dfrac{1}{s^2} + e^{-2s}\cdot\dfrac{1}{s^2} \cancel{+ 2e^{-2s}\cdot\dfrac{1}{s}}$

$= \underline{\underline{e^{-2s}\cdot\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s} - \dfrac{1}{s^2}}}$

---

5. $\mathcal{L}\{y\} = Y$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

$$s^2 Y - s - 2 + 2(sY - 1) + Y = \frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s^2+2s+1) = \frac{2}{s^2+4} + s + 4 = \frac{2 + \overbrace{(s+4)(s^2+4)}^{s^3+4s+4s^2+16}}{s^2+4}$$

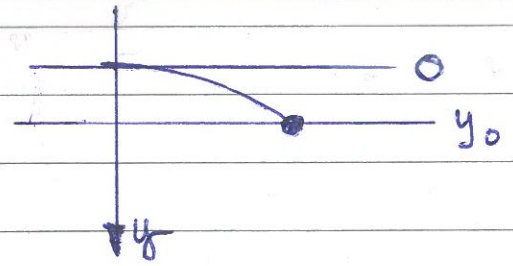
$$Y = \frac{s^3+4s^2+4s+18}{(s+1)^2(s^2+4)} = (\text{partbråk}) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$= (A = 29/25,\ B = 17/5,\ C = -4/25,\ D = -6/25) =$$

$$= \frac{29}{25}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{17}{5}\cdot\frac{1}{(s+1)^2} + \left(-\frac{4}{25}\right)\frac{s}{s^2+4} + \left(-\frac{6}{25}\right)\cdot\frac{1}{s^2+4}$$

$$y(t) = \frac{29}{25}\cdot e^{-t} + \frac{17}{5}\cdot e^{-t}\cdot t - \frac{4}{25}\cdot\cos(2t) - \frac{3}{25}\cdot\sin(2t)$$

6.1 (a)



Vid jämvikt: $mg = ky_0$,

Fjäderkonst $k = \dfrac{mg}{y_0} = \dfrac{0.2\cdot 9.8}{0.01} = 196\left(\frac{N}{m}\right)$

$\rightarrow$

6.1 (b) $my'' = mg - ky$

$$y'' + \frac{k}{m}y = g \qquad \left(\frac{k}{m} = w^2\right)$$

Villkor: $y(0) = 0.01$
$y'(0) = 0.2$

Homogen: $r^2 + w^2 = 0$, $r = \pm iw$

$y_H = A\cos(wt) + B\sin(wt)$

Inhomog: $y_p = C$, $y_p' = y_p'' = 0$

$w^2 \cdot C = g$, $C = \frac{g}{w^2}$

$y_p = \frac{g}{w^2}$

Allm lösn $y(t) = A\cos(wt) + B\sin(wt) + \frac{g}{w^2}$

Villkor: $A + \frac{g}{w^2} = 0.01$, $A = 0.01 - \frac{g}{w^2}$

$y' = -Aw\sin(wt) + Bw\cos(wt)$

Villkor: $y'(0) = 0{,}2$ $\quad Bw = 0{,}2$, $B = \frac{0{,}2}{w}$

Vi får $y(t) = \left(0{,}01 - \frac{g}{w^2}\right)\cos(wt) + \frac{0.2}{w}\sin(wt) + \frac{g}{w^2}$

$y(0.05) = \left(0{,}01 - \frac{g}{w^2}\right)\cos(0{,}05w) + \frac{0.2}{w}\cdot\sin(0{,}05w) + \frac{g}{w^2}$

$\approx$ 16,4 millimeter

6-2 $y = e^{-t} + \int_0^t \sinh(t-x)\, y(x)\, dx$

Med foldning:

$y = e^{-t} + y * \sinh(t)$

$\mathcal{L}\{y\} = Y$

$Y = \frac{1}{s+1} + Y \cdot \frac{1}{s^2-1}$ (Faltn. sætsen)

$Y\left(1 - \frac{1}{s^2-1}\right) = \frac{1}{s+1}$

$Y \cdot \frac{s^2-2}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}$

$Y = \frac{s^2-1}{(s+1)(s^2-2)} = \frac{s-1}{s^2-2} = \frac{s}{s^2-2} - \frac{1}{s^2-2}$

$y(t) = \cosh(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sinh(\sqrt{2}t)$