LULEÅ
TEKNISKA
UNIVERSITET

OBSERVERA: DENNA TENTAMEN GÄLLER STUDENTER PÅ HÖGSKOLE-INGENJÖRSPROGRAM

Tentamen i Matematik III Differentialekvationer, komplexa tal och transformteori

Kurskod	**M0039M**

Tentamensdatum	2015-03-24
Skrivtid	09.00-14.00

Totala antalet uppgifter: 6, max 30 p

Betygsgränser: **U**:0–13, **3**:14–19, **4**:20–25, **5**:26–30.

Resultatet meddelas via Mitt LTU.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare. Bifogad tabell.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt presenterade att de blir svåra att följa. Även endast delvis lösta problem kan ge poäng.
Enbart svar ger 0 poäng.

Institutionen för teknikvetenskap och matematik

Uppgift 1

(a) Låt $z = \dfrac{1+4i}{3+2i}$

Skriv z på rektangulär form, $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. (2 p)

(b) Bestäm $(1 - i\sqrt{3})^5$.

Svaret, som ej får innehålla trigonometriska uttryck, anges på rektangulär form, $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. (2 p)

(c) Betrakta polynomet

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3$$

Man vet att $z = i$ är en rot till polynomet. Bestäm övriga rötter. (3 p)

Uppgift 2

(a) Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

Laplacetransformer får ej användas. (3p)

(b) Bestäm lösningen $I(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I, \quad I(0) = 0.$$

Laplacetransformer får ej användas. (2p)

Uppgift 3

(a) Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

är konvergent eller divergent. Motivera tydligt. (2 p)

(b) Bestäm

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x(e^x - 1 - x)}$$

L'Hospitals regel får inte användas. (2 p)

Uppgift 4

(a) Bestäm en funktion $f(t)$, $\quad t \geqslant 0$, med Laplacetransformen

$$F(s) = \frac{s^2 + 3\,s + 11}{(s+2)(s^2 + 4s + 13)}$$

(3 p)

(b) Bestäm Laplacetransformen för funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 3\,t - t^2, & 0 \leqslant t < 3 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

(2 p)

Uppgift 5

Lös med Laplacetransformation begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 4y' + 3y = \Theta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

(4 p)

Uppgift 6

Lös en och endast en av följande uppgifter.

Uppgift 6.1

Slemsvampen är en märklig organism som bildas av en enda jättelik cell, vilken kan innehålla tusentals cellkärnor. Om det finns god tillgång till näring och vätska, tillväxer den genom att cellkärnorna delar sig. Förändringshastigheten för antalet cellkärnor i slemsvampen, vid en given tidpunkt, är då proportionell mot antalet cellkärnor.

Vid en studie av slemsvampar i laboratoriemiljö, där tillgången till näring och vätska är obegränsad, betraktar man en slemsvamp som initialt hade 800 cellkärnor. Efter ett dygn har antalet växt till 1000.
Efter hur många dygn är antalet cellkärnor 18000?
Svaret avrundas till heltal. (5 p)

Uppgift 6.2

Lös för $t \geqslant 0$ integralekvationen

$$y(t) + 2\int_0^t y(x)\,\cos(t-x)\,dx = \sin(t).$$

Använd Laplacetransformation. (5 p)

M0039M, 24 mar 2015

1 (a) $\dfrac{1+4i}{3+2i} = \dfrac{1}{13}(1+4i)(3-2i) =$

$= \frac{1}{13}(3-2i+12i+8) = \underline{\underline{\frac{1}{13}(11+10i)}}$

1 (b) $(1-i\sqrt{3})^5 = [(1-i\sqrt{3})^2]^2(1-i\sqrt{3}) =$

$= (-2-2\sqrt{3}i)^2(1-i\sqrt{3}) = (4+8\sqrt{3}i-12)(1-i\sqrt{3})$

$= (-8+8\sqrt{3}i)(1-i\sqrt{3}) = 8(-1+\sqrt{3}i)(1-i\sqrt{3}) =$

$= (-8)(-1+\sqrt{3}i)^2 = (-8)(-2-2\sqrt{3}i) = \underline{\underline{16+16\sqrt{3}i}}$

1 (c) $z = \pm i$ parvis konjugerade rötter

$(z+i)(z-i)$ faktorer i $P(z)$. Polynomdiv.

$$\frac{P(z)}{z^2+1} = z^2+2z+3.$$

Återstående rötter: Lös $z^2+2z+3=0$

$z = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm i\sqrt{2}$

Svar: $\underline{\underline{z_{1,2} = \pm i, \quad z_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{2}}}$

2(a)

$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ Linjär, I.F. =

$= \exp(\ln x) = x$

$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{1}{x}$

$xy = \ln x + K$, Allm lösning:

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{x}\ln x + \frac{K}{x}}}$$

2(b) $\frac{dI}{dt} = 15 - 3I$, $I(0) = 0$

$\frac{dI}{dt} + 3I = 15$ Linjär (men kan även tolkas som separabel)

I.F. $= \exp(3t)$

$\frac{d}{dt}(I e^{3t}) = 15 e^{3t}$

$I e^{3t} = 5 e^{3t} + K$

allm lösn: $I(t) = 5 + K e^{-3t}$

Villkor: $I(0) = 0$ ger $K = -5$

Svar $I(t) = \underline{5(1 - e^{-3t})}$ eller

$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$

3(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ ← a_n

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, dvs divergent

3(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x(e^x-1-x)}$

ML-utv: $T: \; x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) - x = -\frac{x^3}{6} + O(x^5)$

$N: \; x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)-1-x\right) =$

$= x\left(\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right) = \frac{x^3}{2}+O(x^4)$

Insättning $\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}+O(x^5)}{\frac{x^3}{2}+O(x^4)} = \frac{-1/6}{1/2} = -\frac{1}{3}$

4(a) $F(s) = \frac{s^2+3s+11}{(s+2)(s^2+4s+13)}$

Partialbruch: Ansatz $\frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+13}$

ger $F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2+9}$ →

$(A=1, C=-1, B=0)$

4 (a) forts:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) =$$

$$= \underline{\underline{e^{-2t} - \frac{1}{3} \cdot e^{-2t} \cdot \sin(3t)}}$$

4(b)

$$f(t) = \begin{cases} 3t - t^2, & 0 \le t < 3 \\ 0, & \text{f.ō.} \end{cases}$$

$$f(t) = (3t - t^2)\big(\theta(t) - \theta(t-3)\big)$$

$$= 3t\,\theta(t) - 3t\,\theta(t-3) - t^2\theta(t) + t^2\theta(t-3)$$

$$= 3t\,\theta(t) - 3(t-3+3)\,\theta(t-3) - t^2\theta(t) +$$

$$+ \big((t-3)^2 + 6(t-3) + 9\big)\theta(t-3).$$

$$f(t) = 3t\,\theta(t) - t^2\theta(t) - 3(t-3)\,\theta(t-3) \cancel{- 9\,\theta(t-3)}$$

$$+ (t-3)^2\theta(t-3) + 6(t-3)\,\theta(t-3) \cancel{+ 9\,\theta(t-3)}$$

$$= 3t\,\theta(t) - t^2\theta(t) + 3(t-3)\,\theta(t-3) + (t-3)^2\theta(t-3)$$

$$\underline{\underline{\mathcal{L}\{f\} = \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s^3} + 3e^{-3s} \cdot \frac{1}{s^2} + e^{-3s} \cdot \frac{2}{s^3}}}$$

5. $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = \theta(t-2) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$

$\mathcal{L}\{y\} = Y$ Transformera bägge led:

$$s^2 Y - 2 + 4sY + 3Y = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s^2+4s+3) = 2 + e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{2}{s^2+4s+3} + e^{-2s} \cdot \frac{1}{s(s^2+4s+3)}$$

$$s^2+4s+3 = (s+3)(s+1)$$

$$Y = \frac{2}{(s+3)(s+1)} + e^{-2s} \cdot \frac{1}{s(s+3)(s+1)}$$

Partialbråk:

$$Y = -\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+1} + e^{-2s}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y\} = y(t) = -e^{-3t} + e^{-t} +$$

$$+ \theta(t-2)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot e^{-3(t-2)} - \frac{1}{2} e^{-(t-2)}\right)$$

6.1 $N(t)$ = antal kärnor vid tid t (dygn)

Ekv: $N' = \lambda N$, $N(0) = 800$

Linjär $N' - \lambda N = 0$, $\frac{d}{dt}(Ne^{-\lambda t}) = 0$

$N(t) = C \cdot e^{\lambda t}$ Villkor: $N(0) = 800$
ger $C = 800$

$N(1) = 1000$ ger $\frac{1000}{800} = e^{\lambda}$

$\lambda = \ln(5/4)$

$N(t) = 800 \cdot e^{\ln(\frac{5}{4})t} = 800 \left(\frac{5}{4}\right)^t$

Sökt: T då $N(T) = 18000$

$\frac{18\,000}{800} = \left(\frac{5}{4}\right)^T$

Logaritmera: $\ln\left(\frac{90}{4}\right) = T \ln\left(\frac{5}{4}\right)$

$T = \frac{\ln\left(\frac{90}{4}\right)}{\ln(5/4)} \approx 13{,}95$

Svar: Efter ca 14 dygn

6.2

$$y(t) + 2\int_0^t y(x)\cos(t-x)\,dx = \sin(t)$$

$$y(t) + 2 \cdot y(t) * \cos(t) = \sin(t)$$

$$\mathcal{L}(y) = Y$$

$$Y + 2 \cdot Y \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y\left(1 + \frac{2s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y \cdot \frac{s^2+2s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \underline{\underline{e^{-t} \cdot t}}$$

7)