OBSERVERA: DENNA TENTAMEN GÄLLER STUDENTER PÅ HÖGSKOLEINGENJÖRSPROGRAM

Tentamen i Matematik III Differentialekvationer, komplexa tal och transformteori

Kurskod	**M0039M**
Tentamensdatum	2016-03-19
Skrivtid	09.00-14.00

Totala antalet uppgifter: 6, max 30 p

Betygsgränser: **U**:0–13, **3**:14–19, **4**:20–25, **5**:26–30.

Resultatet meddelas via Mitt LTU.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare. Bifogad tabell.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt presenterade att de blir svåra att följa. Även endast delvis lösta problem kan ge poäng.
Enbart svar ger 0 poäng.

Institutionen för teknikvetenskap och matematik

Uppgift 1

(a) Ekvationen

$$z^4 - z^3 - 2\,z^2 - 4\,z - 24 = 0$$

har en rent imaginär rot $z = a\,i$ där a är ett okänt reellt tal. Bestäm a och lös därefter ekvationen fullständigt. (3 p)

(b) Bestäm realdelen av

$$(1 + i\,\sqrt{3})^8$$

(2 p)

Uppgift 2

(a) Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen

$$x\,y' + y = \cos x, \quad x > 0.$$

(2 p)

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 3\,y' + 2\,y = 2\,x + 3 + 6\,e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Laplacetransform får ej användas i denna uppgift. (3 p)

Uppgift 3

(a) Avgör om följande serie är konvergent

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{(k!)^2}$$

(2 p)

(b) Använd Maclaurinutveckling för att bestämma följande gränsvärde

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x\,\cos x}{x - \sin x}$$

(3 p)

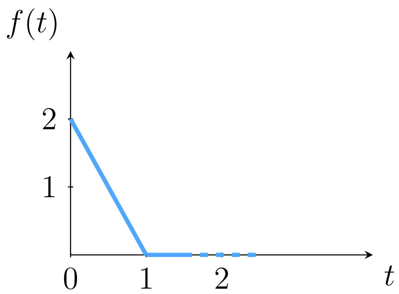
Uppgift 4

(a) Bestäm en funktion $f(t), \quad t \geqslant 0$, med Laplacetransformen

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+1)}$$

(3 p)

(b) Bestäm Laplacetransformen för funktionen $f(t), \quad t \geqslant 0$, vars graf är avbildad i nedanstående figur.



(3 p)

Uppgift 5

Lös med hjälp av Laplacetransformation begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(5 p)

Uppgift 6

Lös en och endast en av följande uppgifter.

Uppgift 6.1

Lös med hjälp av Laplacetransformation systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 3x + 3y = 0 \\ x - \dfrac{dy}{dt} + 7y = 0 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = -1, y(0) = -1$. (5 p)

Uppgift 6.2

I samband med nyhetsrapporteringen på trettioårsdagen efter mordet på Olof Palme, förekom i media följande uppgifter om hur nyheten om Palmemordet spred sig över Sverige.

Åtta timmar efter mordet kände 27 procent av befolkningen till att Olof Palme blivit mördad. Nio timmar efter mordet hade 54 procent av befolkningen nåtts av informationen.

Hur många timmar efter mordet hade 98 procent av befolkningen nåtts av nyheten att Sveriges statsminister blivit mördad?
Avrunda svaret till en decimal.

Kompletterande information
Antag att följande modell används för nyhetsspridning i en befolkning: Hastigheten med vilken en nyhet sprids är proportionell mot produkten av den andel av befolkningen som hört nyheten och den andel som inte hört den. (5 p)

$\boxed{\text{M0039M- 160319}}$

Uppgift 1a

$$z^4 - z^3 - 2z^2 - 4z - 24 = 0$$

sätt in $z = a \cdot i$ ger

$$a^4 \underbrace{i^4}_{=1} - a^3 \underbrace{i^3}_{=-i} - 2a^2 \underbrace{i^2}_{=-1} - 4 \cdot a \cdot i - 24 = 0$$

$$a^4 + 2a^2 - 24 + i(a^3 - 4a) = 0$$

dvs

$$\underbrace{a^4}_{=(a^2)^2} + 2a^2 - 24 = 0 \quad \text{och} \quad a^3 - 4a = 0$$

$a^2 = -1 \pm \sqrt{1+24}$

$a^2 = -1 \pm 5$

$a^2 = 4$

$a = 2$ eller $a = -2$

$a(a^2 - 4) = 0$

$a = 0$ eller $a^2 = 4$

$a = 0$ eller $a = 2$ eller $a = -2$

gemensamma lösningar: $a = 2$ eller $a = -2$

dvs $\boxed{z_1 = 2i}$, $\boxed{z_2 = -2i}$ är rötter

Återstående rötter hittas genom att dela med

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$$

så

$$\begin{array}{r|l} & z^2 - z - 6 \\ \hline z^2 + 4 & z^4 - z^3 - 2z^2 - 4z - 24 \\ & -(z^4 \qquad + 4z^2) \\ \hline & -z^3 - 6z^2 - 4z - 24 \\ & -(-z^3 \qquad - 4z) \\ \hline & -6z^2 \qquad - 24 \\ & -(-6z^2 \qquad - 24) \\ \hline & 0 \end{array}$$

Återstående rötter ges av

$$z^2 - z - 6 = 0$$

$$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \underbrace{6}_{\frac{24}{4}}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\boxed{z_3 = \frac{6}{2} = 3} \qquad \boxed{z_4 = -\frac{4}{2} = -2}$$

M0039M-160319

Uppgift 1b

$z = 1 + i\sqrt{3}$ $\qquad |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\arg z = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z^8 = 2^8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^8 = 256\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$= 256\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)\right)$$

$$= 256\left(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{3}}_{-\frac{1}{2}} + i\underbrace{\sin\frac{2\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = 256\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 128\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$$

så $\quad \operatorname{Re} z^8 = -128$

Uppgift 2a

$$x \cdot y' + y = \cos x, \quad x > 0$$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}$$

Primitiv fkn till $\frac{1}{x}$ är $\ln x$ då $x > 0$

ger Integrerande faktor $e^{\ln x} = x$.

Mult m x ger

$$x y' + y = \cos x$$

V.L kan uttryckas

$$\frac{d}{dx}(x \cdot y) = \cos x$$

Tag primitiv fkn

$$x \cdot y = \sin x + C$$

Allmän lösning

$$y = \frac{\sin x + C}{x}$$

$\boxed{\text{M0039M-160319}}$

Uppgift 2b

1. Homogenlösning till $y'' + 3y' + 2y = 0.$

Karakteristisk ekv: $r^2 + 3r + 2 = 0$

$(r+1)(r+2) = 0$

$r_1 = -1, \quad r_2 = -2$

ger

$$\boxed{y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}}$$

2. Partikulärlösning till $y'' + 3y' + 2y = 2x + 3$

Ansats: $y_1 = a\cdot x + b, \quad y_1' = a, \quad y_1'' = 0$

ger

$$0 + 3\cdot a + 2(ax + b) = 2x + 3$$

$$2ax + 3a + 2b = 2x + 3$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + 2b = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

så

$$\boxed{y_1 = x}$$

3. Partikulärlösning till $y'' + 3y' + 2y = 6e^x$

Ansats: $y_2 = c\cdot e^x, \quad y_2' = c\cdot e^x, \quad y_2'' = c\cdot e^x$

ger

$$c\cdot e^x + 3\cdot c\cdot e^x + 2c\cdot e^x = 6\cdot e^x$$

$$6c\cdot e^x = 6\cdot e^x$$

dvs $c = 1$

och

$$\boxed{y_2 = e^x}$$

4. Allmän lösning

$$y = y_h + y_1 + y_2$$

$$\boxed{y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + x + e^x}$$

5. Begynnelsevillkor $y(0) = 1, \; y'(0) = 1$

$$y' = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x} + 1 + e^x$$

så

$$1 = y(0) = Ae^0 + Be^0 + 0 + e^0$$
$$= A + B + 1$$

$$1 = y'(0) = -Ae^0 - 2Be^0 + 1 + e^0$$
$$= -A - 2B + 2$$

ger

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = -1 \end{cases} \qquad B = -A \qquad A = -1, \quad B = 1$$

Svar:

$$\boxed{y = -e^{-x} + e^{-2x} + x + e^x}$$

M0039M-160319

Uppgift 3a

Termerna $a_k = \dfrac{5^k}{(k!)^2}$

Kvotkriteriet

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{5^{k+1}}{((k+1)!)^2}}{\dfrac{5^k}{(k!)^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\overbrace{5^{k+1}}^{=5^k\cdot 5^1}(k!)^2}{5^k\,(\underbrace{(k+1)!}_{=(k+1)\cdot k!})^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{5^k}\cdot 5\,(k!)^2}{\cancel{5^k}((k+1)\,k!)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{5\,\cancel{(k!)^2}}{(k+1)^2\,\cancel{(k!)^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{5}{(k+1)^2} = 0$$

Eftersom $\rho < 1$ konvergerar serien.

Uppgift 3b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x\cos x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)\right)}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + \frac{x^3}{3} + O(x^5) - \cancel{x} + \frac{x^3}{2} + O(x^5)}{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + O(x^5)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^3 + O(x^5)}{\frac{x^3}{6} + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2+3}{6}\cdot 1 + O(x^2)}{\frac{1}{6} + O(x^2)}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$$

4(a) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s^2+1)}$

$= (\text{part. bråk}) = -\dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2}$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\} =$

$= -\cos(t) - \sin(t) + 1 + t$

(b) $f(t) = (2-2t)(\theta(t) - \theta(t-1)) =$

$= 2[(1-t)\theta(t) + (t-1)\theta(t-1)]$

$\mathcal{L}\{f\} = 2\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^2} + e^{-s} \cdot \dfrac{1}{s^2}\right)$

5) $y'' - y = t, \quad y(0) = y'(0) = 1$

sätt $Y = \mathcal{L}\{y\}$

$s^2 Y - s - 1 - Y = \dfrac{1}{s^2}$

$Y(s^2-1) = 1 + s + \dfrac{1}{s^2}$

$Y = \dfrac{s+1}{s^2-1} + \dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$

$$Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2}{s+1} - \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \frac{3}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t} - t$$

6.1 $$\begin{cases} x' - 3x + 3y = 0 & , x(0) = -1 \\ x - y' + 7y = 0 & , y(0) = -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X, \quad \mathcal{L}\{y\} = Y$$

$$\begin{cases} sX + 1 - 3X + 3Y = 0 \\ X - (sY + 1) + 7Y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s-3) + 3Y = -1 \\ X - Y(s-7) = 1 \end{cases}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} s-3 & 3 \\ 1 & -(s-7) \end{matrix}}_{A} \,\middle|\, \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}}_{b} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} s-3 & 3 \\ 1 & -(s-7) \end{vmatrix} =$$

$$= -(s-7)(s-3) - 3 =$$

$$= -(s^2 - 10s + 24)$$

$$= -(s-6)(s-4)$$

$$X = \frac{s-10}{-(s-6)(s-4)}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-6} - \frac{3}{s-4}\right\} =$$

$$= \underline{2e^{6t} - 3e^{4t}}$$

$$Y = \frac{s-2}{-(s-6)(s-4)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4} - \frac{2}{s-6}\right\} =$$

$$= \underline{e^{4t} - 2e^{6t}}$$

(6.2)

Låt $m(t)$ vara den andel som hört nyheten vid tiden t (tim).

Ekvation

$$\begin{cases} m' = km(1-m), \quad k>0 \\ m(8) = 0{,}27, \quad m(9) = 0{,}54 \end{cases}$$

separabel $\quad (0<m<1)$

$$\int \frac{dm}{m(1-m)} = \int k\,dt$$

$$\int \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{1-m}\right) dm = \int k\,dt$$

$$\ln\left|\frac{m}{1-m}\right| = kt + C$$

$$\left|\frac{m}{1-m}\right| = C_1 e^{kt}, \quad C_1 > 0$$

Allm lösning

$$\frac{m}{1-m} = Ae^{kt}, \quad A \neq 0$$

Villkor $\quad \dfrac{0{,}27}{0{,}73} = Ae^{8k} \quad (1)$

—||— $\frac{0,54}{0,46} = Ae^{9k}$ (2)

$\frac{(2)}{(1)}: \quad e^k = \frac{54 \cdot 73}{46 \cdot 27} = \frac{73}{23}$

$k = \ln\left(\frac{73}{23}\right)$

(1): $\frac{27}{73} = A\left(\frac{73}{23}\right)^8$

$A \approx 3,59 \cdot 10^{-5}$

Sökt T med $m(T) = 0,98$

$49 = Ae^{kT}, \quad e^{kT} = \frac{49}{A}$

$T = \ln\left(\frac{49}{A}\right) \cdot \frac{1}{k}$

Numeriskt $T \approx 12,2$

Svar Efter ca 12,2 h hade 98% av befolkningen nåtts av informationen.