LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

OBSERVERA: DENNA TENTAMEN GÄLLER STUDENTER PÅ HÖGSKOLEINGENJÖRSPROGRAM

Tentamen i Matematik III Differentialekvationer, komplexa tal och transformteori

Kurskod	**M0039M**
Tentamensdatum	2013-03-25
Skrivtid	09.00-14.00

Totala antalet uppgifter: 6, max 30 p

Betygsgränser: **U**:0–13, **3**:14–19, **4**:20–25, **5**:26–30.

Resultatet meddelas på studentportalen. Tentamensresultatet meddelas tidigast 15 arbetsdagar efter tentamensdatum.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare. Bifogad tabell.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt presenterade att de blir svåra att följa. Även endast delvis lösta problem kan ge poäng.
Enbart svar ger 0 poäng.

Institutionen för teknikvetenskap och matematik

Uppgift 1

(a) Antag att $z = 2 + 3i$. Bestäm

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

(2 p)

(b) Lös ekvationen

$$z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0.$$

Svaret anges på rektangulär form $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. (3 p)

Uppgift 2

(a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 6\,e^{2x}$$

Laplacetransformer får ej användas. (3 p)

(b) Lös begynnelsevärdeproblemet

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 3xy = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -1.$$

Laplacetransformer får ej användas. (3 p)

Uppgift 3

(a) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 2n}$ är konvergent eller divergent. Beräkna i förekommande fall summan. (2 p)

(b) Bestäm

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$$

L'Hospitals regel får inte användas. (2 p)

Uppgift 4

(a) Bestäm en funktion $f(t), \quad t \geqslant 0$, med Laplacetransformen

$$F(s) = \frac{3s - 137}{s^2 + 2s + 401}$$

(4 p)

(b) Bestäm Laplacetransformen för

$$f(t) = (t^2 - 3)^2$$

(1 p)

Uppgift 5

Lös med Laplacetransformation begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - 2y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(5 p)

Uppgift 6

Lös en och endast en av följande uppgifter.

Uppgift 6.1

En nygräddad kaka med temperaturen 200° har efter en minut i rumstemperatur (22°) svalnat till 140°. Hastigheten med vilken temperaturen sjunker är proportionell mot skillnaden mellan kakans temperatur och rumstemperaturen (Newtons avsvalningslag). Efter hur lång tid kan kakan ätas?

Lämplig serveringstemperatur bör vara 30°. Svaret anges i minuter och avrundas till en decimal. (5 p)

Uppgift 6.2

Lös, för $t \geqslant 0$, integralekvationen

$$2\cos(2t) = 2y(t) + 5\int_0^t y(t-x)\sin(2x)\,dx.$$

(5 p)

Skisser MAT39M, 13-03-25

1a) $z = 2+3i$

$z^2 = (2+3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

$\frac{1}{z^2} = \frac{-5-12i}{169}$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{12}{169}$

1b) $z^2 - 2iz = -3+4i$

$(z-i)^2 + 1 = -3+4i$

$(z-i)^2 = -3+4i$ $\quad w = z - i$

$w^2 = -3+4i$ $\quad w = x+iy$

Balans

$x^2 - y^2 = -3$

$2xy = 4 \rightarrow x = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}$

$\frac{4}{y^2} - y^2 = -3$

$4 - y^4 = -3y^2$, $y^4 - 3y^2 - 4 = 0$

$y^2 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3 \pm 5}{2}$, $y^2 = 4$ $(y \in \mathbb{R})$

$y = \pm 2 \rightarrow x = \pm\frac{2}{2} = \pm 1 \rightarrow w = \pm(1+2i)$

dvs. $z = w + i = 1+3i$ eller $z = -1-i$

2a) <u>Homogen</u> $r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0 \qquad r = 1$ (dubbel)

$y_H = (Ax+B)e^x$

<u>Inhomogen</u> Ansats $y_p = z e^{2x}$

$y_p' = z' e^{2x} + 2e^{2x} z = e^{2x}(z' + 2z)$

$y_p'' = 2e^{2x}(z' + 2z) + e^{2x}(z'' + 2z')$

$= e^{2x}(z'' + 4z' + 4z)$

Insätt: $e^{2x}(z'' + 4z' + 4z) - 2e^{2x}(z' + 2z) + z e^{2x} = 6e^{2x}$

div med e^{2x} & förenkla

$z'' + 4z' + 4z - 2z' - 4z + z = 6$

$z'' + 2z' + z = 6$ Ansats $z = K$

$K = 6, \longrightarrow \rightarrow y_p = 6e^{2x}$

$y(x) = y_H + y_p = \underline{\underline{(Ax+B)e^x + 6e^{2x}}}$ allm lösn

---

2b) $y' + \frac{3}{x} y = \frac{1}{x^3} \qquad (x \neq 0)$

$\int \frac{3}{x} dx = 3\ln x = \ln(x^3) \rightarrow$

$IF = \exp(\ln(x^3)) = x^3$

$\frac{d}{dx}(yx^3) = 1 \quad , \; yx^3 = x + C$ allm.

villkor $y(1) = -1 \qquad -1 = 1 + C \; , \; C = -2$

<u>Sökt lösn</u> $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

3(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

Betrakta $S_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) =$

$$= \sum_{1}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{1}^{k} \frac{1}{n+2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} -$$

$$- \qquad - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$, som har

gränsv. $\frac{3}{2}$ när $k \to \infty$.

Serien är <u>konvergent</u> med summa $\underline{\underline{3/2}}$

3b)

$$\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

ML-uhv

$$\frac{x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) - x}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - x} =$$

$$= \frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{3} + O(x^2)\right)}{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{6} + O(x^2)\right)} \longrightarrow \underline{\underline{2}} \text{ kun } x \to 0$$

4a)

$$F = \frac{3s - 137}{(s+1)^2 + 400}$$

$$3s - 137 = \alpha(s+1) + \beta$$

$$\alpha = 3, \quad \alpha + \beta = -137$$

$$\beta = -137 - 3 = -140$$

$$F = \frac{3(s+1) - 140}{(s+1)^2 + 20^2} = 3\,\frac{s+1}{(s+1)^2 + 20^2} -$$

$$- \frac{140}{20} \cdot \frac{20}{(s+1)^2 + 20^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\} = \underline{3 \cdot e^{-t}\cos(20t) - 7e^{-t}\sin(20t)}$$

4b) $f(t) = t^4 + 9 - 6t^2$

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{24}{s^5} + \frac{9}{s} - \frac{12}{s^3}$$

---

5) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = y'(0) = 1$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y$$

$$s^2 Y - s - 1 - 2(sY - 1) + 2Y = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s^2 - 2s + 2) = \frac{1}{s+1} + s - 1 = \frac{s^2}{s+1}$$

$$Y = \frac{s^2}{(s+1)(s^2 - 2s + 2)} \overset{\text{Ansatz}}{=} \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2 - 2s + 2}$$

$$= \frac{A(s^2 - 2s + 2) + (Bs + C)(s+1)}{M \cdot N} =$$

$$= \frac{\cancel{As^2} - \cancel{2As} + 2A + \cancel{Bs^2} + \cancel{Bs} + \cancel{Cs} + C}{M \cdot N} =$$

$$= \frac{s^2(A + B) + s(-2A + B + C) + 2A + C}{M \cdot N}$$

Balance
$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B + C = 0 \\ 2A + C = 0 \end{cases}$$

$A = \frac{1}{5}$

$B = \frac{4}{5}$

$C = -\frac{2}{5}$

5 forts

$$Y = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{4}{5}s - \frac{2}{5}}{(s-1)^2+1}$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{4}{5}s - \frac{2}{5} = \alpha(s-1) + \beta \\ \alpha = \frac{4}{5}, \quad \beta - \alpha = -\frac{2}{5} \\ \qquad\qquad \beta = -\frac{2}{5} + \alpha = \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$Y = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{4}{5} \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{2}{5} \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} =$$

$$= \frac{1}{5} e^{-t} + \frac{4}{5} e^{t} \cdot \cos t + \frac{2}{5} e^{t} \sin t$$

6.1 diffekv : $y(t)$: temp vid tid t (min)

y avtar

$$\frac{dy}{dt} = -K(y-22) \quad , K > 0 \quad \text{separabel}$$

$$\frac{dy}{y-22} = -K dt$$

$$\ln(y-22) = -Kt + C, \quad y - 22 = e^{-Kt} \cdot C_1$$

$y(0) = 200 \qquad 178 = C_1, \quad y(1) = 140 \rightarrow$

$118 = e^{-K} \cdot 178 \quad , K \approx 0.41$

6.1 forts

$$y = 22 + 178 \cdot e^{-0.41t}$$

sökt: T för $y(T) = 30$

$$\frac{8}{178} = e^{-0.41\,T}$$

Svar $T = -\frac{1}{0.41} \ln\left(\frac{8}{178}\right) \approx \underline{\underline{7.6}}$ min

---

6.2

$$2\cos(2t) = 2y + 5\underbrace{\int_0^t y(t-x)\sin(2x)\,dx}_{y * \sin(2t)}$$

L-transf. $\mathcal{L}\{y\} = Y$

$$2 \cdot \frac{s}{s^2+4} = 2Y + 5Y \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

$$\frac{2s}{s^2+4} = Y\left(2 + \frac{10}{s^2+4}\right) = Y\left(\frac{2s^2+18}{s^2+4}\right)$$

$$Y = \frac{2s}{2(s^2+9)} = \frac{s}{s^2+3^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \underline{\underline{\cos(3t)}}$$