Laboration 2 M0039M, VT2016

Ove Edlund, Staffan Lundberg, TVM

24 februari 2016

1 Teoridel

1.1 Serielösningar till differentialekvationer

Den grundläggande idén (se t.ex. utdelat material, Lektion 18) är att skriva lösningen $y(x)$ som en potensserie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

och sedan bestämma koefficienterna $c_k, k = 0, 1, 2, \ldots$. I Matlab får vi nöja oss med en serielösning med ändligt antal termer — och därmed en approximativ lösning.

Exempel 1

Bestäm med Matlab en approximativ serielösning till begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Använd 4 termer. Plotta därefter lösningen tillsammans med den exakta lösningen för $0 \le x \le 3$.

Börja med att härleda rekursionsformeln för koefficienterna $c_k, k = 0, 1, 2, \ldots$, genom att ta fram

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k\, k(k-1)\, x^{k-2},$$

sätta in i differentialekvationen

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k\, k(k-1)\, x^{k-2} + 4\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, x^{k-1} + 3\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

skifta indexen i potensserierna så att exponenten till x har samma uttryck i alla serier

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}\,(k+2)(k+1)\,x^k + 4\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\,(k+1)\,x^k + 3\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

och uttryck sedan vänsterledet med endast ett summatecken, och bryt ut x^k

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big(c_{k+2}\,(k+2)(k+1) + 4\,c_{k+1}\,(k+1) + 3\,c_k\big)x^k = 0$$

Enda möjligheten att summan blir 0 för alla val av x är att alla koefficienter för x^k är noll, dvs

$$c_{k+2}\,(k+2)(k+1) + 4\,c_{k+1}\,(k+1) + 3\,c_k = 0$$

vilket ger rekursionsformeln

$$c_{k+2} = -\frac{4\,c_{k+1}\,(k+1) + 3\,c_k}{(k+2)(k+1)}$$

Begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$ ger $c_0 = 1$ och $c_1 = 4$ (från potensserierna för y och y' ovan). Därmed kan vi enkelt ta fram de fyra första koefficienterna. Matlabs kommandofönster:

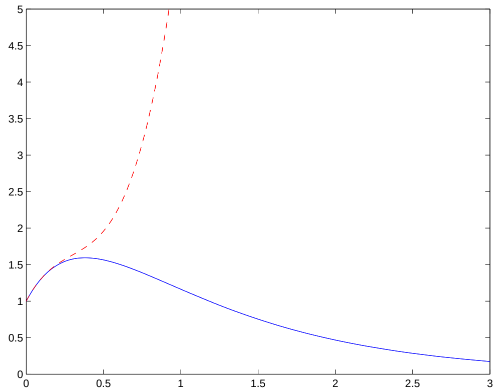
```
>> c0 = 1;
>> c1 = 4;
>> c2 = -(4*c1*1+3*c0)/(2*1)

c2 =

   -9.5000

>> c3 = -(4*c2*2+3*c1)/(3*2)

c3 =

   10.6667
```

Den exakta lösningen (kontrollera) är

$$y = \frac{7}{2}e^{-x} - \frac{5}{2}e^{-3x}.$$

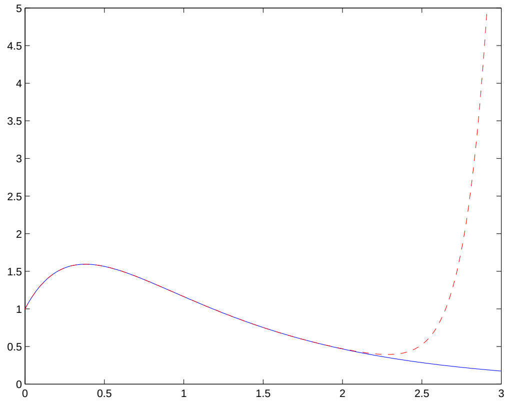
Vi plottar så den exakta lösningen (blå kurva) i samma koordinatsystem som den approximativa (röd kurva).

```
>> xs = 0:0.01:3;
>> ys = c0 + c1*xs + c2*xs.^2 + c3*xs.^3;
>> plot(xs,3.5*exp(-xs)-2.5*exp(-3*xs),xs,ys,'r--')
>> axis([0 3 0 5])
```



Överkurs – Om så önskas kan antalet termer enkelt utökas genom att använda for-loop i Matlab, och placera koefficienterna c_k i en vektor. Observera dock att Matlab använder "1" som första index, inte "0", vilket påverkar uttrycket en smula. Polynomapproximationen av potensserien kan beräknas med `polyval`, men med brasklappen att `fliplr` behövs för att koefficienterna ska vara i rätt ordning. Nedanstående Matlab-script illustrerar hur det kan se ut:

```
% serielosning.m
N = 20;  % Antal termer
c = [];
c(1) = 1;
c(2) = 4;
for k=0:N-3
    % Rekursionsformeln
    c(k+3) = -(4*c(k+2)*(k+1)+3*c(k+1))/((k+2)*(k+1));
end

xs = 0:0.01:3;
ysapprox = polyval(fliplr(c),xs);
ysexact = 3.5*exp(-xs)-2.5*exp(-3*xs);
plot(xs,ysexact,xs,ysapprox,'r--')
axis([0 3 0 5])
```



1.2 Laplacetransformering med Matlab

Matlab har inbyggda rutiner för såväl Laplacetransform som invers Laplacetransform. Eftersom beräkningarna sker symboliskt , måste vi deklarera de ingående variablerna med kommandot `syms`.

Exempel 2

Bestäm Laplacetransformen till

$$f(t) = -1.25 + 3.5te^{-2t} + 1.25e^{-2t}.$$

```
>> syms t s   %Symbolisk deklarering
>> f=-1.25+3.5*t*exp(-2*t)+1.25*exp(-2*t);
>> F=laplace(f,t,s)  %Matlab-kommando for Laplacetransformering av f(t)

F =

5/(4*(s + 2)) + 7/(2*(s + 2)^2) - 5/(4*s)

>> simplify(F)   %Forenkla uttrycket

ans =

(s - 5)/(s*(s + 2)^2)
```

Exempel 3

Inverstransformera

$$F(s) = \frac{s-5}{s(s+2)^2}$$

```
>> syms t s
>> F=(s-5)/(s*(s+2)^2);
>> f=ilaplace(F) %Matlab-kommando for inverstransformering

f =

(5*exp(-2*t))/4 + (7*t*exp(-2*t))/2 - 5/4

>> pretty(f)    % Mer lattlast

  5 exp(-2 t)    7 t exp(-2 t)
  ----------- + ------------- - 5/4
       4               2
```

Exempel 4

Inverstransformera $F(s) = \dfrac{10(s+2)}{s(s^2+4s+5)}$.

```
>> syms t s
>> F=10*(s+2)/(s*(s^2+4*s+5));
>> ilaplace(F)

ans =

4 - 4*exp(-2*t)*(cos(t) - sin(t)/2)
```

Begynnelsevärdesproblem

Exempel 5

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$36y'' + 12y' + 37y = 0, \quad y(0) = 0.7, \quad y'(0) = 0.1. \tag{1}$$

Plotta lösningskurvan i intervallet $0 \leq t \leq 20$.

Observera notationen i Matlab. $y(t)$ refererar till y, $D(y)(t)$ refererar till dy/dt, $D(D(y))(t)$ till d^2y/dt^2 osv.

```
>> % Vi skriver om ekvationen som y''+(1/3)y'+37/36 y=0
>> syms s t Y
>> ode='D(D(y))(t)+1/3*D(y)(t)+37/36*y(t)=0'

ode =

D(D(y))(t)+1/3*D(y)(t)+37/36*y(t)=0
```

Vi Laplacetransformerar ekvation (1).

```
>> ltode=laplace(ode,t,s)

ltode =

s^2*laplace(y(t), t, s) - D(y)(0) - s*y(0) - y(0)/3 + (s*laplace(y(t), t, s))/3 +
(37*laplace(y(t), t, s))/36 == 0
```

Matlab levererar en algebraisk ekvation i den obekanta funktionen `laplace(y(t),t,s)`. Vi förenklar detta uttryck genom att ersätta `laplace(y(t),t,s)` med `Y` och sätta in våra begynnelsevillkor. Detta görs med kommandot `subs`. Vi får en ekvation i `Y`.

```
>> eqn=subs(ltode,{'laplace(y(t),t,s)','y(0)','D(y)(0)'},{Y,0.7,0.1})

eqn =

(37*Y)/36 - (7*s)/10 + (Y*s)/3 + Y*s^2 - 1/3 == 0
```

Vi löser ut Y och erhåller

```
>> Y=solve(eqn,Y)

Y =

(126*s + 60)/(180*s^2 + 60*s + 185)
```

Vi bestämmer så $y(t)$ genom inverstransformering:

```
>> y=ilaplace(Y)

y =

(7*exp(-t/6)*(cos(t) + (13*sin(t))/42))/10
```

Att detta är den sökta lösningen till ekvation (1), verifierar vi med följande Matlab-kommandon:

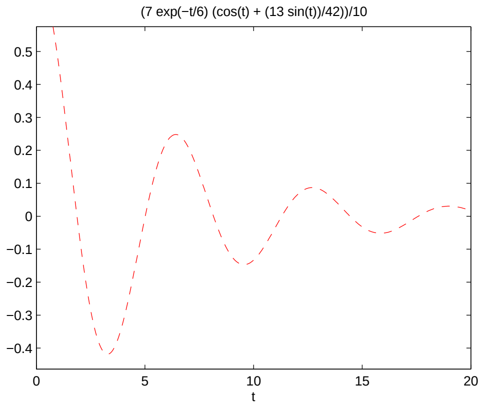
```
>> diff(y,2)+1/3*diff(y,1)+37/36*y  %Vanstra ledet i ekv (1), efter div med 36

ans =

0
```

Vi kontrollerar även att begynnelsevillkoren stämmer med ekvation (1):

```
 >> t=0; y_0=eval(y), Dy_0=eval(diff(y))

y_0 =

    0.7000


Dy_0 =

    0.1000
```

Återstår att plotta lösningskurvan.

```
>> p1=ezplot(y,[0,20]);
>> set(p1,'Color','red','LineStyle','--') % Streckad, rod linje
```



2 Uppgiftsdel

2.1 Anvisningar

Senaste inlämning för den skriftliga redogörelsen är för

- Laboration 1: 19 februari 2016,
- Laboration 2: 10 mars 2016.

Observera Samtliga laborationer skall vara godkända senast 23 mars 2016. Eventuella kvarvarande laborationer/returer efter detta datum underkänns och laborationerna måste göras om vid nästkommande kurstillfälle VT 2017.

- Följ anvisningarna i "PM Laborationsmomentet i M0039M, VT2016", som du kan ladda ner från Fronter.
- Uppgifterna 1–3 nedan är obligatoriska och skall lämnas in senast 10 mars 2016. I uppgift 1 skall matematisk härledning av rekursionsformeln redovisas, samt sekvensen av Matlabkommandon som använts och resulterande graf.

2.2 Laborationsuppgifter

Uppgift 1

Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$2\,y'' - x\,y' + y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

(a) Bestäm analytiskt (med papper och penna) en rekursionsformel för potensserielösningen till detta begynnelsevärdesproblem.

(b) Rita med Matlab en graf i intervallet $0 \leq x \leq 3$, över en approximation till lösningen där minst fem termer används.

Tips: I denna uppgift är det lämpligt att ta med första "nolltermen" (dvs $k = 0$) i potensserien för y', när rekursionsformeln ska plockas fram. Detta ger (för andra termen i vänsterledet):

$$x\,y' = x \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,k\,x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,k\,x^k\ .$$

Kommandot `axis` som användes i Exempel 1 ovan, behöver inte användas här.

Uppgift 2

(a) Använd Matlab för att bestämma Laplacetransformen till följande funktioner:

- $\cos(3t)$,
- $e^{2t} \cdot \cos(3t)$,
- t^6.

(b) Bestäm med Matlab inversa Laplacetransformen till

- $\dfrac{1}{(s+2)(s-3)}$
- $\dfrac{e^{-6s}}{s^2 + 8s + 15}$

Uppgift 3

Ett massa-fjädersystem uppfyller begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{2}$$

där

$$g(t) = \begin{cases} 8t, & 0 \leq t \leq 5 \\ 40, & t > 5 \end{cases}$$

(a) Använd `ezplot` för att plotta $g(t)$ i intervallet $0 \leq t \leq 10$. Funktionen $g(t)$ plottas som en streckad, röd linje.

Notera att Heavisides stegfunktion $\Theta(t)$ är definierad i Matlab med funktionsanropet **`heaviside(t)`**.

(b) Använd Laplacetransformer och Matlab för att lösa begynnelsevärdesproblemet (2). Se Exempel 5.

(c) Använd `ezplot` för att plotta lösningskurvan $y(t)$ i intervallet $0 \leq t \leq 10$.