Om serielösningar av differentialekvationer.

Staffan Lundberg,
Luleå tekniska universitet,
Inst. för teknikvetenskap och matematik,
971 87 LULEÅ.

12 februari 2015

1 Inledning

Vi vet sedan tidigare att linjära ODE med konstanta koefficienter kan vi lösa med algebraiska metoder, och att lösningarna kan skrivas som elementära funktioner.

För ODE med variabla koefficienter, måste vi ibland tillgripa andra metoder. Som ett exempel på andra metoder ska vi härnäst betrakta en metod, som går ut på att beskriva lösningen som en potensserie.

2 Potensseriemetoden

2.1 Konstanta koefficienter

Exempel 1.
Lös differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = -y. \tag{1}$$

Vi ansätter en lösning i form av en potensserie

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{2}$$

Vi antar att potensserien har en konvergensradie $R > 0$. Då får vi derivera (2) termvis, enligt Sats 10.16 i [1]:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \tag{3}$$

Vi sätter in (3) och (2) i (1):

$$(c_1 + 2c_2 x + \ldots) = -(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots).$$

Därefter identifierar vi termer med samma x-potens:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -c_0 \\
2c_2 &= -c_1 \\
3c_3 &= -c_2 \\
4c_4 &= -c_3 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Vi kommer fram till att

$$c_1 = -c_0, \quad c_2 = -\frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2!}, \quad c_3 = -\frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3!}, \quad \dots$$

Vi sätter in dessa värden i (2), varav vi så småningom erhåller en välbekant potensserie (Sats 8.3 (a) i [1]):

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 - c_0 x + \frac{c_0}{2!}x^2 - \frac{c_0}{3!}x^3 + \dots = c_0\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = c_0 e^{-x}.$$

Lös (som nyttig övning) ekvation (1) med en metod vi tidigare gått igenom under kursen.

Exempel 2.
Lös med potensseriemetoden differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \tag{4}$$

Vi antar att det existerar en lösning i form av en potensserie

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{5}$$

Vi deriverar (5) termvis:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \tag{6}$$

respektive

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \tag{7}$$

Vi ändrar numreringen av (7):

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k \tag{8}$$

Vi sätter in (5) och (8) i (4):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0,$$

eller

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big((k+2)(k+1)c_{k+2}+c_k\big)x^k=0.$$

Teorin säger att y är en lösning till differentialekvationen (4) om och endast om

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}+c_k=0,$$

vilket leder oss till rekursionsformeln

$$c_{k+2}=-\frac{c_k}{(k+2)(k+1)},\quad k=0,1,2,3,\ldots$$

Vi sätter in några k-värden, för att om möjligt skönja ett mönster:

k	Koefficient
0	$c_2=-\dfrac{c_0}{2\cdot 1}$
1	$c_3=-\dfrac{c_1}{3\cdot 2}$
2	$c_4=-\dfrac{c_2}{4\cdot 3}=\dfrac{c_0}{4!}$
3	$c_5=-\dfrac{c_3}{5\cdot 4}=\dfrac{c_1}{5!}$
4	$c_6=-\dfrac{c_4}{6\cdot 5}=-\dfrac{c_0}{6!}$
5	$c_7=-\dfrac{c_5}{7\cdot 6}=-\dfrac{c_1}{7!}$

Vi ser förhoppningsvis mönstret:

$$\text{För jämna index:}\quad c_{2k}=(-1)^k\frac{c_0}{(2k)!}$$

$$\text{För udda index:}\quad c_{2k+1}=(-1)^k\frac{c_1}{(2k+1)!}$$

Vi sätter in ovanstående i (5), vilket gör att vi kan skriva lösningen som

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=$$

$$=c_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\ldots\right)+$$

$$+c_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots\right)$$

Vi känner säkerligen igen dessa serier som Maclaurinserierna för $\cos x$ respektive $\sin x$. Således skriver vi lösningen som

$$y = c_0 \cos x + c_1 \sin x,$$

där c_0 och c_1 är godtyckliga reella konstanter.

Som nyttig repetition rekommenderar jag att du löser ekvation (4) med de metoder du tidigare lärt dig.

Anmärkning 1. *Vi har betraktat potensseriemetoden i enkla linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Potensserieutveckling är användbar i mer generella, ofta icke-linjära problem, där vi inte kan lösa problemen med algebraiska metoder.*

I våra exempel kunde vi uttrycka potensserielösningarna i termer av elementära funktioner. Detta är oftast inte fallet.

2.2 Icke-konstanta koefficienter

Som avslutning ska vi titta på ett mer komplicerat exempel på en andra ordningens linjär ODE med icke-konstanta koefficienter. Här är vi tvungna att använda potensseriemetoden, eftersom vi inte med traditionella M0039M-metoder kan lösa sådana typer av problem.

Exempel 3.
Lös med potensseriemetoden den s.k. ***Airy's ekvation***

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0. \tag{9}$$

Vi antar att det existerar en lösning i form av en potensserie

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{10}$$

Vi deriverar (5) termvis:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \tag{11}$$

respektive

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \tag{12}$$

Vi ändrar numreringen av (12):

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k \tag{13}$$

Låt oss nu sätta in (13) och (10) i (9):

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k = 0$$

eller

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1} = 0$$

Vi gör en indexförändring i sista summan i VL:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}x^k = 0$$

Vi plockar ut första termen ($k = 0$) i första summan i VL.

Då kan vi förenklat skriva med ett summatecken:

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big((k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1}\Big)x^k = 0$$

Om vi följer tidigare principer i Ex. 1 och Ex. 2, måste då följande villkor vara uppfyllda:

$$2c_2 = 0$$

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1} = 0 \Leftrightarrow c_{k+2} = \frac{c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Vi sätter in några k-värden, för att om möjligt urskilja ett mönster (vi vet redan att $c_2 = 0$):

k	Koefficient
1	$c_3 = \frac{c_0}{3\cdot 2}$
2	$c_4 = \frac{c_1}{4\cdot 3}$
3	$c_5 = 0$ (Eller hur?)
4	$c_6 = \frac{c_3}{6\cdot 5} = \frac{c_0}{(6\cdot 5)(3\cdot 2)}$
5	$c_7 = \frac{c_4}{7\cdot 6} = \frac{c_1}{(7\cdot 6)(4\cdot 3)}$
6	$c_8 = 0$ (Eller hur?)
7	$c_9 = \frac{c_6}{9\cdot 8} = \frac{c_0}{(9\cdot 8)(6\cdot 5)(3\cdot 2)}$

Vi noterar att $c_2, c_5, c_8, \ldots$ alla är lika med noll. Vidare noterar vi att $c_3, c_6, c_9, \ldots$ alla kan beskrivas i termer av c_0, medan $c_4, c_7, c_{10}, \ldots$ alla kan beskrivas i termer av c_1. Vi skriver detta konstaterande mer generellt:

$$c_{3k} = \frac{c_0}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdots (3k-1) \cdot (3k)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

respektive

$$c_{3k+1} = \frac{c_1}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \cdots (3k) \cdot (3k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Den allmänna lösningen till Airy's ekvation kan därmed skrivas på formen

$$y = c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdots (3k-1) \cdot (3k)} \right) +$$

$$+ c_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \cdots (3k) \cdot (3k+1)} \right),$$

där c_0 och c_1 är godtyckliga reella konstanter.

Anmärkning 2. *Observera att $c_0 = y(0)$ respektive $c_1 = y'(0)$. Detta utnyttjar vi när vi löser begynnelsevärdesproblem.*

Övningar

(1.) Använd potensserier för att bestämma den allmänna lösningen till differentialekvationerna

(a) $y' + y = 1$

(b) $y' - y = 0$

(c) $y' = x^2 y$

(2.) Använd potensserier för att bestämma lösningen till begynnelsevärdesproblemet

(a) $y' = x - y, \quad y(0) = 0$

(b) $y'' = y$, $y(0) = y'(0) = 1$

(c) $(*)$ $\quad y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Facit

(1.) (a) $1 + (c_0 - 1)e^{-x}$

(b) $y = c_0 e^x$

(c) $y = c_0 e^{x^3/3}$

(2.) (a) $y = e^{-x} + x - 1$

(b) $y = e^x$

(c) $y = e^{x^2/2}$

Tack

Tack till professor Lars-Erik Persson för värdefulla synpunkter på innehållet.

Referenser

[1] G. Forsling and M. Neymark. *Matematisk analys, en variabel*. Liber, 2 edition, 2011.