Om system av differentialekvationer och deras förhållande till Cramers regel.

Staffan Lundberg,
Luleå tekniska universitet,
inst. för teknikvetenskap och matematik,
971 87 LULEÅ.

14 januari 2016

1 Inledning.

För att lösa ett system av differentialekvationer med Laplacetransformation, kombinerar vi redan kända metoder från M0039M med ett maskineri från den linjära algebran (läs: Gausselimination).

På frekvenssidan kan Gausseliminering emellertid ge upphov till diverse besvärliga uttryck, när vi så småningom ska lösa ut de obekanta. Låt oss därför betrakta en alternativ lösningsmetod, som erbjuder en genväg att direkt lösa ut de obekanta. Metoden, som kallas Cramers regel, bygger på determinantbegreppet.

2 Cramers regel.

Låt $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vara ett linjärt ekvationssystem, och låt vidare $\mathbf{A}$ vara en inverterbar $n \times n$-matris.

Vi skriver $\mathbf{A}$ som en radmatris:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Sats 1 (Cramers regel)**.** *Antag att* $\mathbf{A}_i(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ *är matrisen vi erhåller då vi ersätter kolonn* $\mathbf{a}_i$ *i* $\mathbf{A}$ *med vektorn* $\mathbf{b}$. *Då har systemet* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *den entydiga lösningen* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, *så att*

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i(\mathbf{b})}{\det \mathbf{A}}$$

Exempel 1.
Lös ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -5x + 4y = 8 \end{cases}$$

Lösningsförslag.
Vi betraktar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Vi får snabbt att $\det \mathbf{A} = 2$, eller hur? Därmed är $\mathbf{A}$ inverterbar, så vi kan nyttja Cramers regel.

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \cdots & -2 \\ \cdots & 4 \end{bmatrix} \quad \text{respektive} \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3 & \cdots \\ -5 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} = \frac{40}{2} = 20, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} = \frac{54}{2} = 27.$$

3 System av differentialekvationer.

Exempel 2.
Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + 5y = e^{-t} \\ \dfrac{dy}{dt} - 3y - 5x = \quad 0 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = y(0) = 0$.

Lösningsförslag.
Vi transformerar respektive ekvation.

$$\mathcal{L}\left\{x' + 3x + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\}$$
$$\mathcal{L}\left\{y' - 3y - 5x\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$
$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$(s+3)X + 5Y = \frac{1}{s+1}$$
$$-5X + (s-3)Y = 0$$

På matrisform blir systemet

$$\begin{bmatrix} s+3 & 5 \\ -5 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cramers regel:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & 5 \\ 0 & s-3 \end{vmatrix}}{s^2+16} = \frac{s-3}{(s^2+16)(s+1)},$$
$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s+3 & \frac{1}{s+1} \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{s^2+16} = \frac{5}{(s^2+16)(s+1)}.$$

$$X(s) = \frac{4 \cdot s + 13}{17 \cdot (s^2+16)} - \frac{4}{17 \cdot (s+1)}$$

Vi får:

$$x(t) = \frac{4}{17}\cos(4t) + \frac{13}{68}\sin(4t) - \frac{4}{17} \cdot e^{-t},$$

efter partialbråksansats, tabellslagning, diverse passningsräkningar och inverstransformering. Läsaren ombeds att utföra dessa kalkyler.

Analogt får vi för $y(t)$:

$$Y(s) = \frac{5}{17 \cdot (s+1)} - \frac{5 \cdot s - 5}{17 \cdot (s^2 + 16)}$$

$$y(t) = -\frac{5}{17}\cos(4t) + \frac{5}{68}\sin(4t) + \frac{5}{17} \cdot e^{-t}.$$

4 Övningar.

(1.) Lös med Cramers regel ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y + 7z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

(2.) Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 2y = 3 \\ \dfrac{dy}{dt} - 2x + y = e^{2t} \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = 2, y(0) = -1$.

(3.) Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 3y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x - y = e^{-t} \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = y(0) = 0$.

(4.) (*) Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x - 2y = \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} - 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = y(0) = 0$.

(5.) Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + 4y = 10 \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = 4, \quad y(0) = 3$.

5 Facit.

(1.)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -13.5 \\ 16 \\ 10.5 \end{bmatrix}$$

(2.)

$$x(t) = \frac{2 \cdot e^{2 \cdot t}}{5} + \frac{3 \cdot e^{t}}{2} + \frac{11 \cdot e^{-3 \cdot t}}{10} - 1$$
$$y(t) = \frac{3 \cdot e^{2 \cdot t}}{5} + \frac{3 \cdot e^{t}}{2} - \frac{11 \cdot e^{-3 \cdot t}}{10} - 2$$

(3.)

$$x(t) = \frac{1}{3\sqrt{8}} \sin(\sqrt{8} \cdot t) - \frac{1}{3} \cos(\sqrt{8} \cdot t) + \frac{1}{3} e^{-t}$$
$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{8}} \sin(\sqrt{8} \cdot t)$$

(4.)

$$x(t) = \frac{16 \cdot \sin(t)}{37} - \frac{15 \cdot \cos(t)}{37} + \frac{2 \cdot e^{-t}}{5} + \frac{e^{-6 \cdot t}}{185}$$
$$y(t) = \frac{5 \cdot \sin(t)}{37} - \frac{7 \cdot \cos(t)}{37} + \frac{e^{-t}}{5} - \frac{2 \cdot e^{-6 \cdot t}}{185}$$

(5.)

$$x(t) = e^{-t} \cdot (2 \cdot \cos(2 \cdot t) - 2 \cdot \sin(2 \cdot t)) + 2$$
$$y(t) = e^{-t} \cdot (\sin(2 \cdot t) + \cos(2 \cdot t)) + 2$$

Tack.

Tack till univ lekt Ove Edlund för värdefulla synpunkter på innehållet.

Referenser

[1] H. Sollervall and B. Styf. *Transformteori för Ingenjörer*. Studentlitteratur, 2 edition, 2009.

[2] G. Sparr. *Linjär algebra*. Studentlitteratur, 2 edition, 1994.

[3] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, 2 edition, 1998.