Problem för envar

Övningssamling i envariabelanalys
nedtecknad vid
Matematiska institutionen

Juni 2013

Problem

1 Reella och komplexa tal

1.1 Förenkla

(a) $a^2 + b - c \quad \text{där} \quad c = 1 - a + 2b$

(b) $3x^2 - 2x + 1 - y \quad \text{där} \quad y = 5x - 7 - z \quad \text{och} \quad z = -2 + x^2$

1.2 Skriv bråken $\dfrac{\frac{12}{13}}{8}$ samt $\dfrac{12}{\frac{13}{8}}$ på enklaste form.

1.3 Ange den minsta gemensamma nämnaren till följande bråk. Beräkna sedan summan av dem.
(a) $\dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{28}, \dfrac{1}{21}$ (b) $\dfrac{x+1}{x^2+1}, \dfrac{2x+4}{x^2-1}, \dfrac{-3}{x-1}$.

1.4 Skriv uttrycket $-\dfrac{1}{x-2y} + \dfrac{x-y}{x^2-4xy+4y^2} - \dfrac{y}{(x-2y)^2}$ som ett bråk i så enkel form som möjligt.

1.5 Utveckla $(a - 2b + 3c)^2$ till en summa av produkter.

1.6 Dela upp följande uttryck i faktorer så långt det går:
(a) $x^3 - x$ (b) $3x^5y^2 - 48xy^{10}$.

1.7 Bevisa formlerna $x^px^q = x^{p+q}$, $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ samt $x^py^p = (xy)^p$ för alla reella tal x, $y > 0$ och alla heltal p och q.

1.8 Kvadratkomplettera uttrycken.
(a) $x^2 + 5x + 7$ (b) $3 + 6x - 2x^2$

Ange också (om möjligt) största och minsta värde för dessa uttryck samt för vilka x dessa värden antas.

1.9 Lös ekvationen $\dfrac{ax-1}{x-b} = 2$ för alla värden på de reella konstanterna a och b.

1.10 Bestäm alla lösningar x till (a) $x^2 - 1 = (x+1)^2$ (b) $x^3 = 2x^2 - x$.

1.11 Bestäm alla lösningar x till $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+a}$ för alla reella värden på konstanten a.

1.12 Bestäm alla lösningar till $\dfrac{1}{2x+2} + \dfrac{5}{4x+3} = 1$.

1.13 För vilka reella konstanter a har ekvationen $x^2 + 9x + a = 0$ två olika reella lösningar?

1.14 Bestäm alla lösningar till (a) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ (b) $abx^2 + ab = a^2x + b^2x$
för alla olika reella värden på konstanterna a och b.

1.15 30 studenter läste en kurs där det krävdes godkänt på två deltentamina för att få godkänt på hela kursen. 25 klarade tentamen I, 18 tentamen II och 3 ingen tentamen. Hur många var godkända på kursen efter dessa tentamina?

1.16 Undersök om punkterna P_1, P_2 och P_3 alla ligger på samma räta linje då

(a) $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (5,-5)$ och $P_3 = (-5,10)$

(b) $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (10,11)$ och $P_3 = (20,21)$.

1.17 Vad betyder ekvationen $x^2 + y^2 = 4x$?

1.18 Visa att $x^2+y^2+ax+by+c=0$ är en ekvation för en cirkel om och endast om $a^2+b^2 > 4c$. Bestäm cirkelns medelpunkt och radie i så fall. Vad betyder ekvationen om $a^2 + b^2 = 4c$? Om $a^2 + b^2 < 4c$?

1.19 Bestäm alla reella x som uppfyller

(a) $\sqrt{2x+6} = 1 - x$ (b) $x + \sqrt{1-4x} = 1$ (c) $\sqrt{5-8x} + 2 = 2x$

1.20 Bestäm alla lösningar till

(a) $\sqrt{x^2+6x+9} = 2x+2$ (b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-1} = 1$ (c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{9x+9} = 2x+2.$

1.21 Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer:

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = \sqrt{2x}$ (b) $x^2 + 6x + \sqrt{x^2+6x+8} = 64$

1.22 För vilka reella tal x är uttrycket $\sqrt{1-\sqrt{2-x}}$ definierat (som ett reellt tal)?

1.23 Dividera (a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (b) $\dfrac{x^4-1}{x-1}$ (c) $\dfrac{-3x+5}{x^2-7}$ (d) $\dfrac{x^4+2x^3+25}{x^2+4x+5}$.

1.24 Använd polynomdivision för att skriva om följande uttryck på en form där man tydligt kan läsa av kvot och rest:

(a) $\dfrac{x^3+x^2-17x+8}{x-3}$ (b) $\dfrac{x^3-8x^2+13x}{x^2-3x+1}$.

1.25 Bestäm resten då polynomet $x^{100} + x^{67} - x^{32} - 2x^9 + 1$ divideras med
(a) $x - 1$ (b) $x + 2$ (c) $x^2 - x$.

1.26 Dela upp följande polynom fullständigt som produkter av förstagradspolynom:

(a) $x^2 + 2x - 63$ (b) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$.

1.27 Är $x = 6$ lösning till (a) $x^3 - 5x^2 - 12x + 36 = 0$ (b) $x^3 - 4x^2 - 17x + 36 = 0$?

1.28 Bestäm alla lösningar till

(a) $x^3 - 7x + 6 = 0$ (b) $2x^3 - 5x^2 + 4 = 0$
(c) $x^3 - 8 = 19(x-2)$ (d) $x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 10 = 0$.

1.29 Visa följande samband mellan rötterna $x = \alpha_1$ och $x = \alpha_2$ till en andragradsekvation $x^2 + ax + b = 0$ och ekvationens koefficienter a och b:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -a \quad \text{och} \quad \alpha_1\alpha_2 = b$$

(med $\alpha_2 = \alpha_1$ om α_1 är en dubbelrot).

1.30 Härled ett samband mellan rötterna $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ och $x = \alpha_3$ till en tredjegradsekvation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ och ekvationens koefficienter a, b och c.

1.31 Lös följande ekvationer: (a) $(x-3)^3 - (2x+1)^3 = 0$ (b) $\dfrac{4x-3}{x^3-1} + \dfrac{3x-4}{x^2-1} = \dfrac{3}{x}$

1.32 Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} (x-y)(2x+3y) &= 0 \\ x^2+y^2 &= 1. \end{cases}$

1.33 För vilka x gäller följande olikheter?

(a) $2x - 3 < 0$ (b) $x + 3 > 2x - 1$ (c) $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$
(d) $x^2 < 3$ (e) $x^2 \geq 5$ (f) $(x-2)^2 \leq 1$

1.34 Bestäm det minsta värde som $x^2 - 3x + 1$ kan ha för reella tal x. (Ledning: Kvadratkomplettering).

1.35 Visa att (a) $x(x-2) \geq -1$ för alla reella tal x (b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$ för alla $x > 0$ och $y > 0$.

När gäller likhet i (a) resp (b)?

1.36 Bestäm det största möjliga värde som produkten av två reella tal x och y kan ha då deras summa är 10.

1.37 Bestäm ett andragradspolynom som har

(a) minsta värdet 1 i $x = 1$ (b) största värdet 3 i $x = -2$

1.38 För vilka x gäller följande olikheter?

(a) $x^2 - 10x + 25 > 0$ (b) $2x^4 + 6x > x^3 + 7x^2$ (c) $x^2 \geq \dfrac{3x+2}{x}$

(d) $x^3 \geq 3x + 2$ (e) $x \geq 2(x-2)$ (f) $\dfrac{x+1}{x} < 2$

1.39 För vilka reella tal x gäller olikheterna

(a) $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{1-x}$ (b) $\dfrac{x-1}{x+3} \leq \dfrac{x+2}{2x+1}$ (c) $\dfrac{x}{x+4} + \dfrac{x}{x+1} \geq 1$

(d) $\dfrac{1+2x-3x^2}{2x^2-5x+2} \geq 0$?

1.40 Bestäm de reella konstanterna a och b så att olikheten $\dfrac{x-a}{x-b} \geq 0$ har lösningsmängden

(a) $]-\infty, 1[\, \cup [2, +\infty[$ (b) $]-\infty, 1] \cup\,]2, +\infty[$
(c) $]-\infty, 1[\, \cup\,]1, +\infty[$ (d) $]-\infty, +\infty[$

1.41 (a) Bestäm ett tal ω sådant att $x > \omega \Rightarrow 1/x^2 < 1/100$. Är ω entydigt bestämt?

(b) Bestäm för varje tal $\epsilon > 0$ ett tal ω (som får bero på ϵ) sådant att $x > \omega \Rightarrow 1/x^2 < \epsilon$.

1.42 För vilka reella tal x gäller olikheten $\sqrt{1-8x^2} \geq 1 - 4x$?

1.43 Räkna ut

(a) $\left|(-3)^2 + (-2)^3\right|$ (b) $\left|(-3)^2\right| + \left|(-2)^3\right|$ (c) $\left|3^{-2} - 2^{-3}\right|$ (d) $\left|\dfrac{(-3)^4}{(-4)^3}\right|$ (e) $\dfrac{|(-3)^4|}{|(-4)^3|}$

1.44 Bestäm alla reella x som uppfyller

(a) $2|x+1| - |x-1| = 2$ (b) $|x+2| + |3-4x| = 6x - 5$ (c) $|x+1| + |2x-3| - |x-3| = 5$

1.45 Bestäm alla lösningar till följande ekvationer:

(a) $\left|\dfrac{x-1}{2x+3}\right| = 2$ (b) $\left|x^2 - 1\right| = |2x+1|$

1.46 För vilka x gäller följande olikheter?

(a) $0 < |x-1| < 3$ (b) $\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right| \geq 1$ (c) $\left|x^2 - 4\right| < 2$ (d) $\dfrac{|x-1|}{|x|-1} \geq 1$

1.47 Visa att $|x-2| < 3 \implies |x+1| < 6$.

1.48 Visa att för reella tal x och y gäller att

(a) $x^2 + y^2 \leq 1 \implies |x| \leq 1$ och $|y| \leq 1$ (b) $x^2 + y^2 \leq 1 \implies \left|x^3 + y^3\right| \leq 1$

1.49 Lös följande ekvationer: (a) $|x|\,(x+4) = 3$ (b) $|x+a| = x$ för varje reellt tal a

1.50 Bestäm konstanten c så att $x = 0$ är en lösning till ekvationen

$$|1 - 4x^2| = 3 - c\,|x-1|.$$

Bestäm därefter alla reella lösningar till ekvationen, för detta värde på c.

1.51 Räkna ut summorna (a) $\sum_{j=2}^{5} j\,2^j$ (b) $\sum_{i=0}^{k-1} 1$

1.52 Skriv med summatecken

(a) $1+8+27+64+125+216+343$ (b) $\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{97}+\frac{1}{99}$

(c) s_n, om $s_0=0$ och $s_n=s_{n-1}+n^2$ för $n=1,2,\ldots$.

1.53 Visa att $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=2}^{101}\frac{1}{k}$.

1.54 Räkna ut (a) $\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{2}$ (b) $\sum_{j=m}^{n}(3j+1)$ (c) $\sum_{k=0}^{2n}(n-k)$

1.55 Räkna ut (a) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{3^k}$ (b) $\sum_{k=2}^{100}(-1)^k 2^k$

1.56 Hur stort måste heltalet $n>0$ vara för att följande olikhet skall gälla?

$$1+1.1+(1.1)^2+(1.1)^3+\cdots+(1.1)^n>100$$

1.57 Visa att

(a) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ för $n=1,2,3,\ldots$

(b) $x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots-x+1)$ för $n=1,3,5,\ldots$

1.58 I en geometrisk summa med reella termer är summan av de två första termerna lika med 16 och summan av de fyra följande lika med 5. Bestäm första termen och kvoten i summan.

1.59 Skriv ut faktorerna i följande produkter. Räkna också ut produkterna (b) och (c).

(a) $\prod_{k=2}^{n}2k$ (b) $\prod_{j=0}^{100}2^{-j}$ (c) $\prod_{m=1}^{n}\frac{m+1}{m}$

1.60 Skriv $2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)\cdot\ldots\cdot(-19)$ med produkttecken

1.61 Räkna ut $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$ och $\binom{5}{4}$

1.62 Skriv på enklaste form (a) $\binom{21}{19}$ (b) $\binom{13}{9}$ (c) $\binom{n+1}{n-2}$.

1.63 Bevisa Pascals triangel, d.v.s. att $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ för alla positiva heltal n och k.

1.64 Utveckla (a) $(a+b)^5$ (b) $(2x-3y)^4$ (c) $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^6$.

1.65 För vilka reella x gäller sambandet $\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^k=-32$?

1.66 Låt $z=3+2i$ och $w=-1+4i$. Bestäm

(a) $z+w$ (b) $z-w$ (c) $-3w$ (d) $\operatorname{Re} w$ (e) $\operatorname{Im} z$

(f) $\bar{w}$ (g) zw (h) $|z|$ (i) $\frac{z}{w}$

1.67 Låt $z=2+3i$. Beräkna $|z|^2$, z^2 samt $|z^2|$.

1.68 Beräkna $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{3+4i}\right)$ samt $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{3+4i}\right)$.

1.69 Bevisa formlerna $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, $z\bar{z} = |z|^2$ för alla komplexa tal z.

1.70 Visa räknelagen $|zw| = |z|\,|w|$ för komplexa tal, med hjälp av sambandet $|z|^2 = z\bar{z}$

1.71 Räkna ut i^0 i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, $\ldots$. Vad kan allmänt sägas om i^{-n} för heltal $n \geq 0$?

1.72 Räkna ut z^{-1}, z^{-2} och z^{-3} då (a) $z = -i$ (b) $z = 1 - i$ (c) $z = a + ib$.

1.73 Lös ekvationerna

(a) $z + 3 - i = 7 + 3i$ (b) $7z - 3 + 2i = 4 + i$ (c) $2\bar{z} + 1 + i = \overline{5 - 3i}$
(d) $(2 + 3i)z = 1 - i$ (e) $(1 + i)z + (7 + 2i)\bar{z} = 2 + 5i$.

1.74 Vilken av punkterna $z = \dfrac{(1+2i)^4(2-3i)}{(2-i)^2}$ och $w = \dfrac{(\sqrt{2}+i)^3(1-i)(\sqrt{17}-i)}{1-\sqrt{2}i}$ ligger längst från origo?

1.75 Räkna ut $|z|$ då z är (a) $\dfrac{(3+i)(5-i)}{(4+3i)(2i-3)}$ (b) $(2-i)^{-12}$

1.76 I denna uppgift ska vi se på hur det komplexa talsystemet definieras. Definiera alltså ett komplext tal z som ett ordnat talpar $z = (x, y)$, där $x, y \in \mathbf{R}$ ('ordnat' betyder att $(x, y) \neq (y, x)$ om $x \neq y$). Om nu $z = (x, y)$ och $w = (u, v)$ är två komplexa tal definierar vi räknesätten $+$ och $\cdot$ enligt

$$z + w = (x + u, y + v)\,,\ z \cdot w = (xu - yv, xv + yu).$$

(a) Vi behöver nu visa att våra komplexa tal uppfyller samma räknelagar som de reella talen så att vi kan räkna 'som vanligt' med komplexa tal. Då bevisen är ganska lika varandra nöjer vi oss med att visa några av dessa räknelagar. Visa därför att $z + w = w + z$ och att $c(wz) = (cw)z$ för alla komplexa tal $c = (a, b)$, $z = (x, y)$ och $w = (u, v)$.

(b) Visa att $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ och att $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$ så att de komplexa talen på formen $(x, 0)$ beter sig precis som de reella talen. Vi skriver därför $x = (x, 0)$ i fortsättningen.

(c) Sätt nu $i = (0, 1)$ och visa att då är $i^2 = -1$. Visa också att det komplexa talet $z = (x, y)$ kan skrivas $z = (x, y) = x + iy$.

1.77 Visa att en ekvation $z^2 = a + ib$ (med reella a och b) alltid har lösningar $z = x + iy$ (med reella x och y) genom att visa att ekvationen är ekvivalent med systemet av ekvationer

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{och} \quad 2xy = b$$

och visa att detta system alltid har reella lösningar x och y. En hjälp är att se att ekvationerna medför att $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.78 Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^2 + (1 - 2i)z - 3 - i = 0$.

1.79 Lös ekvationerna (a) $z^2 = 5 - 12i$ (b) $(2 + i)z^2 + (1 - 7i)z - 5 = 0$.

1.80 Finn en andragradsekvation vars rötter är kvadraterna på rötterna till $z^2 + az + b = 0$.

1.81 Låt $P(z) = 5z^3 + 3z^2 + 5z + 3$. Beräkna $P(i)$ och faktorisera därefter P i reella faktorer av lägsta möjliga grad.

1.82 Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 10z + 25 = 0$ har rötterna $z = 2 + i$ och $z = -1 - 2i$. Lös ekvationen fullständigt.

1.83 Faktorisera polynomet $p(z) = z^5 - 10z^2 + 15z - 6$ fullständigt i komplexa respektive reella faktorer.

1.84 Bestäm de reella talen $a_0, a_1, \ldots, a_5$ så att polynomet $p(z) = z^6 + a_5 z^5 + \ldots + a_1 z + a_0$ har ett enkelt nollställe i $2 - i$ och ett dubbelt i i.

1.85 Ekvationen $2z^4 + 11z^3 + 33z = 18$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen.

1.86 Ekvationen $z^4 + 12z^2 + 35 = 2z^3 + 14z$ har en rot med realdelen 1. Lös ekvationen.

1.87 Lös ekvationerna (a) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ (b) $z^6 + 2 = 2z^3$.

1.88 Bestäm alla komplexa tal z sådana att $(z + 1 - i)^6 = (z - 1 + i)^6$.

1.89 Visa att man kan bestämma konstanten a så att polynomet $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + 2$ är delbart med $x^2 + 2x + 2$. Bestäm a och därefter alla nollställen till p.

1.90 Ange ett sjättegradspolynom med rationella koefficienter som har ett dubbelt nollställe $z = \sqrt{2}$ och ett enkelt nollställe $z = i$.

1.91 För vilka reella a har ekvationen $(z + i)^4 = a$ minst en reell rot? Lös ekvationen för dessa a.

2 Funktioner m.m.

2.1 Antag att f är en funktion med $D_f = V_f = \mathbf{R}$ och att f har en invers funktion f^{-1}. Undersök om funktionen g har en invers funktion g^{-1} och bestäm den i så fall uttryckt i f^{-1} om

(a) $g(x) = f(x) - 2$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{1 + f(x)}$ (c) $g(x) = f(x^2)$ (d) $g(x) = f(x)^2$

2.2 Visa att funktionen $f : x \mapsto x^3 + x$ har en invers funktion f^{-1} och bestäm $f^{-1}(y)$ då

(a) $y = 0$ (b) $y = 2$ (c) $y = -2$ (d) $y = 10$

Försök inte att bestämma $f^{-1}(y)$ för alla $y \in D_{f^{-1}}$!

2.3 Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$. Bestäm, om möjligt, inversen f^{-1} samt definitions- och värdemängd för f och f^{-1}.

2.4 Bestäm eventuell invers f^{-1} till den funktion f som ges av

(a) $f(x) = x^2\,, \quad -3 \le x \le -1$ (b) $f(x) = x^2\,, \quad -4 \le x \le -3$ eller $1 \le x \le 2\,.$

2.5 För vilka reella konstanter a, b och c gäller att funktionen

$$f : x \mapsto \frac{x - a}{bx - c}$$

är sin egen invers, dvs att $f^{-1}(x) = f(x)$ för $x \in D_f$?

2.6 Bestäm definitionsmängden samt (om möjligt) inversen till f om $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x + 2}}$.

2.7 Förenkla följande uttryck till en term: (a) $\ln 2 + \ln 8$ (b) $2 \ln 3 + \ln 2$ (c) $\ln \dfrac{2}{3} + \ln \dfrac{3}{2}$

2.8 Ordna talen $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5$, $\ln 7 + 2 \ln 6 - \ln 2$, $7 \ln 2$, $3 \ln 5$ och $2 \ln 11$ efter storlek.

2.9 Förenkla följande uttryck till en term: (a) $\ln x^2 - 3 \ln x$ (b) $2 \ln 3 + \ln 6 - 3 \ln 2$

2.10 Visa, med hjälp av olikheten $\ln x > 0$ då $x > 1$, att funktionen ln är strängt växande, dvs att $x_1 < x_2 \Longrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ gäller för $x_1 \in D_{\ln}$ och $x_2 \in D_{\ln}$.

2.11 Rita följande kurvor: (a) $y = \ln(x - 2)$ (b) $y = \ln x - \ln x^2$

2.12 Bestäm definitionsmängden för funktionen f då

(a) $f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$ (b) $f(x) = \sqrt{\ln x + \ln(4 - x)}$.

2.13 (a) Bestäm definitionsmängden till f om $f(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)}$.

(b) När Linus och Linnea jobbade med (a)-uppgiften försökte de använda omskrivningen $\sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)} = \sqrt{\ln(1-x)-\ln(3-x)}$. Kommentar?

Vad hade du sagt om omskrivningen $\sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)} = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)} = \sqrt{\ln(x-1)-\ln(x-3)}$?

2.14 Endast i undantagsfall gäller att $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$.

(a) Ge exempel på tal $x > 0$ och $y > 0$ sådana att likheten ovan **inte** gäller.

(b) För vilka tal $x > 0$ finns tal $y > 0$ så att likheten gäller? Bestäm y för varje sådant x.

2.15 Bestäm $\ln 36$ uttryckt med $a = \ln 24$ och $b = \ln 54$.

2.16 Antag att $e^x = \sqrt{2}$ och $e^y = \sqrt{8}$. Räkna ut (a) e^{x+y} (b) e^{2x} (c) e^{2x+2y}

2.17 För vilka reella x gäller sambandet $e^{2x+3} = e^{2x} + e^3$?

2.18 Visa att $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ och $\left(e^x\right)^p = e^{px}$ (p heltal) gäller för alla reella tal x och y t ex genom att se på ln av vänsterledet i varje formel och använda lämplig regel för ln.

2.19 Förenkla följande uttryck:

(a) $\dfrac{e^{2x}e^{-y}}{e^{x-y}}$ (b) $\left(\dfrac{e^{-2x}e^{y}}{e^{-x}e^{2y}}\right)^{-1}$ (c) $e^{\ln 4-\ln 3} + 2e^{\ln 3}$

(d) $\exp(\ln\sqrt{x+1} + \ln\sqrt{x-1})$ (e) $2\ln(e^{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x-1}})$

2.20 Bestäm definitionsmängden för funktionen f och undersök om f har en invers funktion f^{-1} och bestäm i så fall ett uttryck för den om $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x-1}{2-e^x}}$.

2.21 Visa att $2 < e < 4$ genom att sätta $x = 2$ i olikheterna $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x-1$ för $x > 0,\ x \neq 1$ och använda sambandet $\ln e = 1$.

2.22 Visa olikheterna

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{för } n = 1, 2, \ldots .$$

Ledning: De är ekvivalenta med olikheterna

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \ln e < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Visa att dessa i sin tur följer av olikheterna $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x-1$ med $x = 1+1/n$.

2.23 Visa reglerna

$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha,\ x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta},\ \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta},\ \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \text{ och } \left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha$$

för reella tal α och β ($x > 0,\ y > 0$) t ex genom att se på ln av alla leden i varje formel.

2.24 Förenkla (a) $\sqrt[4]{\dfrac{25}{81}}$ (b) $\sqrt[4]{8\cdot 32}$.

2.25 Bestäm alla reella lösningar till (a) $4x^4 = 81$ (b) $8x^3 + 27 = 0$ (c) $x^6 + 4027 = 0$.

2.26 Bestäm definitionsmängden samt (om möjligt) inversen till f om $f(x) = \dfrac{e^x+4}{e^x+3}$.

2.27 Bestäm definitionsmängden samt (om möjligt) inversen till f om
(a) $f(x) = \ln(x+1) - \ln(5-2x)$ (b) $f(x) = \ln(2-x) - \ln(1-x)$.

2.28 Bestäm (om möjligt) inversen till f om
(a) $f(x) = 3 - e^{2x} + 3e^x$ med $D_f =]-\infty, 0]$ (b) $f(x) = 3 - e^{2x} + 3e^x$ med $D_f = [0, \infty[$.

2.29 Talet $16^{1/4} + 3^{4/3} + 1/2^{-3} + 2^2/3^{-1/3} - 3^{1/3}/7^{-1}$ är ett heltal. Vilket?

2.30 Bestäm definitionsmängd för funktionen f då
(a) $f(x) = (2x - x^2)^{0.1}$ (b) $f(x) = \sqrt[4]{\ln(1-x)}$.

2.31 Undersök om funktionen f har en invers funktion f^{-1} och bestäm den i så fall om
(a) $f(x) = \ln(x^e + 1)$, $x \geq 0$ (b) $f(x) = (x - x^2)^\pi$, $0 < x < 1$.

2.32 Förenkla följande utryck: (a) $\dfrac{2^x 8^y}{2^{-x} 4^y}$ (b) $\left(\dfrac{3^{2x}}{9^{-x}}\right)^{1/2}$

2.33 Visa att ${}^2\log 1000 < 10$.

2.34 (a) Visa att funktionen $f : x \mapsto e^{2x} - 4e^x$, $x \geq \ln 2$, är injektiv. Bestäm också den inversa funktionen f^{-1}.
(b) Bestäm inversens definitions- och värdemängd.

2.35 Lös ekvationerna (a) $\ln x + \ln(x+3) = 1$ (b) $3^{2x-1} = 2^{3x+1}$

2.36 För vilka reella tal x gäller (a) $(\ln x)^2 > -\ln x$ (b) $x^x > x$ och $x > 0$

2.37 Bestäm alla lösningar $x > 0$ till ekvationen $(2x)^{\ln 2} = (3x)^{\ln 3}$.

2.38 Skissa grafer, dels till en funktion f med $D_f = \mathbf{R}$ som *är*, dels till en funktion g med $D_g = \mathbf{R}$ som *inte är*

(a) injektiv	(b) växande	(c) strängt växande	(d) avtagande
(e) strängt avtagande	(f) monoton	(g) strängt monoton	(h) uppåt begränsad
(i) nedåt begränsad	(j) begränsad	(k) jämn	(l) udda.

2.39 Skissa grafen till en funktion f som är definierad för alla reella tal och som är
(a) ej jämn, ej udda (b) strängt växande, begränsad
(c) strängt avtagande, uppåt begränsad, ej nedåt begränsad.

2.40 Låt $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ och $h(x) = \ln x$. Uttryck på så enkel form som möjligt

(a) $f(g(x))$	(b) $f(h(x))$	(c) $g(f(x))$	(d) $g(h(x))$
(e) $h(f(x))$	(f) $h(g(x))$	(g) $f(g(h(x)))$	(h) $f(h(g(x)))$
(i) $g(f(h(x)))$	(j) $g(h(f(x)))$	(k) $h(f(g(x)))$	(l) $h(g(f(x)))$.

2.41 (a) Finn funktioner $f(x)$ och $g(x)$ sådana att $e^{-x^2} = f(g(x))$.
(b) Finn funktioner $f(x)$, $g(x)$ och $h(x)$ sådana att $\ln(1 + \cos^2 x) = f(g(h(x)))$.

2.42 Antag att f och g båda är strängt växande funktioner och definierade överallt. Är
(a) $f + g$ (b) fg (c) $f \circ g$
nödvändigtvis strängt växande? Ange motexempel i annat fall.
(d) Lös (a)–(c) men med ”växande” utbytt mot ”avtagande”.

2.43 Rita en enhetscirkel i ett koordinatsystem på ett rutat papper (t ex med enheten 10 rutor) och markera de punkter på cirkeln som svarar mot vinklarna $\pi/6$, $\pi/4$ och $\pi/3$. Använd sedan definitionen via enhetscirkeln för att blixtsnabbt ange $\cos v$ och $\sin v$ då v är

(a) $\dfrac{5\pi}{6}$ (b) $\dfrac{4\pi}{3}$ (c) $-\dfrac{\pi}{3}$ (d) $-\dfrac{\pi}{2}$ (e) $-\dfrac{3\pi}{4}$ (f) $-\dfrac{5\pi}{6}$

2.44 Ange snabbt (med hjälp av enhetscirkeln)

(a) $\cos\dfrac{25\pi}{4}$ (b) $\cos\dfrac{100\pi}{3}$ (c) $\cos\Big(-\dfrac{23\pi}{6}\Big)$ (d) $\sin\Big(-\dfrac{25\pi}{3}\Big)$

2.45 Förenkla $\cos n\pi$ där $n \in \mathbf{Z}$.

2.46 Bestäm alla lösningar v till (a) $\sin v = \dfrac{1}{2}$ (b) $\cos v = \sin v$ (c) $\sin v = \sin(\pi - v)$.

2.47 Bestäm alla reella tal v sådana att

(a) $\cos v = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ och $\sin v = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $2\cos v = -1$ och $2\sin v = \sqrt{3}$

2.48 Räkna ut $\cos\Big(v + \dfrac{\pi}{6}\Big)$ då $\cos v = -\dfrac{2}{3}$ och (a) $0 < v < \pi$ (b) $\pi < v < 2\pi$

2.49 Antag att u, v och w är vinklar i en triangel. Visa att $\sin\Big(\dfrac{u}{2} + \dfrac{v}{2}\Big) = \cos\dfrac{w}{2}$.

2.50 Räkna ut (a) $\tan 0$, $\tan\dfrac{\pi}{4}$, $\cot\dfrac{\pi}{4}$ och $\cot\dfrac{\pi}{2}$ (b) $\tan\dfrac{\pi}{6}$, $\cot\dfrac{\pi}{6}$, $\tan\dfrac{\pi}{3}$ och $\cot\dfrac{\pi}{3}$

2.51 Ange $\tan v$ och $\cot v$ då v är (a) $\dfrac{5\pi}{6}$ (b) $-\dfrac{\pi}{4}$ (c) $-\dfrac{\pi}{2}$ (d) $-\dfrac{5\pi}{6}$

2.52 Vilka samband gäller mellan vinklarna u och v om (a) $\tan u = \tan v$ (b) $\cot u = \cot v$?

2.53 Bestäm alla lösningar v till följande ekvationer:

(a) $\tan v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\cot v = -1$ (c) $\cos v = -\sqrt{3}\sin v$ (d) $\tan v + \cot v = 2$

2.54 Räkna ut $\tan(u + v)$ då $\tan u = 3/4$ och $\cot v = 2/3$.

2.55 Rita följande kurvor i samma koordinatsystem:

(a) $y = 2\cos x$, $y = \cos 2x$ och $y = \cos\dfrac{x}{2}$ (b) $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$ och $y = \sin\dfrac{x}{2}$

2.56 Bestäm avståndet mellan punkterna P_1 och P_2 då de ges genom polära koordinater $r_1 = 1$ och $\phi_1 = \pi/3$ resp $r_2 = 3$ och $\phi = -\pi$.

2.57 Bestäm $u + v$ då $\tan u = 2$, $\tan v = 3$, $0 < u < \pi/2$ och $0 < v < \pi/2$.

2.58 Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

2.59 Låt $t = \tan\dfrac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$.

(a) Visa att $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $-\pi < x < \pi$.

(b) Härled liknande formler för $\sin x$ och $\tan x$.

Anm: Dessa formler är användbara vid beräkning av primitiva funktioner till vissa trigonometriska uttryck.

2.60 Antag att $\tan u = 1/7$ och $\tan v = 3/4$. Vilka värden kan $u + v$ ha?

2.61 Bestäm vinklarna i en likbent triangel där tangens för vinkeln vid spetsen är 2 gånger sinus för en av de två lika vinklarna vid basen.

2.62 Vad är beloppet av $e^{i\phi}$ om ϕ är reellt?

2.63 Skriv följande tal på polär form:
$$\begin{array}{lll} z_1 = 1 & z_2 = -13 & z_3 = i \\ z_4 = -1 + i & z_5 = i\sqrt{3} - 1 & z_6 = -3\,e^{-i\pi/5}. \end{array}$$

2.64 Lös ekvationerna (a) $z^3 = i\sqrt{3} - 1$ (b) $z^3 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$.

2.65 Visa att systemet av ekvationer

$$1 + \cos x + \cos 2x = 0 \quad \text{och} \quad \sin x + \sin 2x = 0$$

är ekvivalent med ekvationen $1 + e^{ix} + e^{2ix} = 0$ och använd detta för att lösa det givna systemet.

2.66 Räkna ut $\operatorname{Re} w$ och $\operatorname{Im} w$ (som funktioner av $x \in \mathbf{R}$) då $w = i\, e^{2x - ix}$

2.67 Antag att C_1 och C_2 är komplexa konstanter och att a och b är reella konstanter. Bestäm komplexa konstanter A och B så att

$$C_1\, e^{(a+ib)x} + C_2\, e^{(a-ib)x} = e^{ax}\,(A \cos bx + B \sin bx) \quad \text{för } x \in \mathbf{R}\,.$$

2.68 Visa att $zw = rse^{i(\varphi+\psi)}$ och $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{s} e^{i(\varphi-\psi)}$, då z och w ges i polär form $z = re^{i\varphi},\ w = se^{i\psi}$.

2.69 Räkna ut $(1 + i)^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2.70 Bestäm komplexa tal a och b så att

$$(-2 + 2i)a + (1 - 2i)(ax + b) = x \quad \text{för alla reella tal } x$$

och bestäm sedan real- och imaginärdelarna av $(ax + b)\, e^{(1+i)x}$.

2.71 Räkna ut $\arcsin x$ och $\arccos x$ om x är

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (e) -1 (f) $\sqrt{3}$.

2.72 Räkna ut $\arctan x$ om x är

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (c) -1 (d) $-\sqrt{3}$.

2.73 Man vet att $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ och att $\tan x = 2$. Bestäm x.

2.74 Beräkna (a) $\arcsin\left(\sin \dfrac{8\pi}{7}\right)$ (b) $\arccos\left(\cos \dfrac{7\pi}{5}\right)$ (c) $\arctan\left(\tan \dfrac{16\pi}{5}\right)$.

2.75 Från en punkt på en cirkel med radie R syns en korda under vinkel α. Hur lång är kordan?

2.76 Betrakta åter egenskaperna (a)–(l) i uppgift 2.38. För varje egenskap (a)–(l), vilka övriga egenskaper är oförenliga med denna? (Vi betraktar funktioner som är definierade på hela $\mathbf{R}$.)

2.77 Räkna ut $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ då

(a) $v = \arcsin \dfrac{1}{3}$ (b) $v = \arccos \dfrac{2}{3}$ (c) $v = \arctan 2$

(d) $v = \arcsin\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ (e) $v = \arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ (f) $v = \arctan(-2)$.

2.78 Räkna ut $\cos\left(\dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{1}{3}\right)$ exakt.

2.79 Låt $\alpha = \arcsin \dfrac{13}{14}$ och $\beta = \arccos \dfrac{1}{7}$.

(a) Beräkna $\tan(\alpha + \beta)$.
(b) Bestäm alla vinklar med samma tangensvärde som i (a).
(c) Stäng in $\alpha + \beta$ i ett öppet intervall av längd högst π.
(d) Beräkna $\alpha + \beta$.

2.80 Låt α och β vara som i uppgift 2.79.

(a) Bestäm tre komplexa tal som har i tur och ordning α, β och $\alpha+\beta$ som argument.
(b) Bestäm alla argument för det tredje talet i (a).
(c) Stäng in $\alpha+\beta$ i ett öppet intervall av längd högst 2π.
(d) Beräkna $\alpha+\beta$.

2.81 Förenkla så långt det går

(a) $3\arctan 2 - \arctan\dfrac{2}{11}$ (b) $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan 4$.

2.82 Låt $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + e^{-x^2}\right)$, $x \geq 0$. Bestäm om möjligt f^{-1}.

2.83 Vi studerar ekvationen $\arctan x = 2\arccos x$.
(a) Visa att om x löser ekvationen så måste $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$. (b) Lös ekvationen!

2.84 Bevisa följande samband för hyperboliska funktioner. Ange också hur motsvarande samband för trigonometriska funktioner ser ut!

(a) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ (b) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$.

2.85 Bestäm inversen till tanh. Ange också definitions- och värdemängd för tanh och $\tanh^{-1}$.

2.86 Betrakta två rymdskepp som rör sig rakt mot varandra med farterna v_1 och v_2 i förhållande till en fix punkt mellan dem. I klassisk mekanik är som bekant deras relativa hastighet $v = v_1 + v_2$, men enligt relativitetsteorin är den

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}.$$

(Vi mäter hastigheterna som bråkdelar av ljushastigheten c; t.ex. betyder $v = 1/10$ hastigheten $c/10$, d.v.s. ca 30.000 km/s.) Använd additionsformeln för tanh i uppgift 2.84b för att beskriva även detta senare samband som en addition. Förklara med hjälp av grafen till tanh!

2.87 Betrakta följande mängd av funktioner:

$$M = \{(\ )^2, (\ )^3, \sqrt{\ }, |\ |, \ln, \exp, \cos, \sin, \tan, \arccos, \arcsin, \arctan\}.$$

(Med $(\ )^2$ menas funktionen $x \mapsto x^2$, etc). Skissa funktionernas grafer och ange sedan alla $f \in M$ sådana att

(a) f är injektiv (b) f är strängt växande (c) f är strängt avtagande
(d) f är begränsad (e) $f \geq 0$ (f) $D_f = \mathbf{R}$
(g) $V_f = \mathbf{R}$ (h) f är jämn (i) f är udda.

2.88 Betrakta återigen funktionerna i uppgift 2.87. Lös för samtliga dessa funktioner ekvationen $f(x) = f(y)$, $x, y \in D_f$.

3 Gränsvärden och kontinuitet

3.1 Skissera grafen och bestäm $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ då $f(x) = \ln x$.

3.2 Beräkna (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^3 + x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 2} + x + 1\right)$.

3.3 Beräkna (a) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{-x^2 + x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2 + x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2 + x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$.

3.4 Vad är (a) $\lim\limits_{n\to\infty} 1$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{n}{n+m}\right)$ (c) $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+m}\right)$?

3.5 (a) Vad menas med att $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$?

(b) Bestäm ett tal ω sådant att $\left|\dfrac{x}{x-1} - 1\right| < \dfrac{1}{10}$ då $x > \omega$.

(c) Bestäm för varje $\epsilon > 0$ ett ω sådant att påståendet $x > \omega \Rightarrow \left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} - 1\right| < \epsilon$ gäller.

Vad visar detta?

3.6 Visa att om f har ett ändligt gränsvärde A då $x \to \infty$ så är detta entydigt bestämt, d.v.s. att om också $f(x) \to B$ då $x \to \infty$ så är $A = B$.

3.7 Undersök gränsvärdena (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n + 1}{(-1)^n n - 1}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cos\frac{1}{n}$

3.8 Undersök följande gränsvärden (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} e^{-1/x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0-} e^{-1/x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-1/x}$.

3.9 Räkna ut $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/\ln x^2}$.

3.10 (a) Vad menas med att $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = 1$?
(b) Vad menas med att f är en kontinuerlig funktion?
(c) Är $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ kontinuerlig för $x \geq 0$?
(d) Är $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + x + \ldots + x^n}$ kontinuerlig för $x \geq 0$?

3.11 (a) Formulera och illustrera satsen om mellanliggande värden.
(b) Kan villkoren mildras?

3.12 Visa att funktionen $f(x) = x \ln x$, $x \geq 1$, har en invers funktion $f^{-1}(x)$, $x \geq 0$, och undersök $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x) \ln x}{x}$.

3.13 Beräkna gränsvärdena (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \ldots + (n-2)!}{n!}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{n!}$.

3.14 Undersök $e^{-x} \ln x$ då $x \to 0+$ och $x \to \infty$.

3.15 Beräkna (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 7x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.

3.16 Räkna ut (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+3x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

3.17 Räkna ut (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to-\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

3.18 Antag att $f(x) = \sin x \sin\dfrac{1}{x}$ för $x \neq 0$, men att $f(0)$ (ännu) inte är definierat. Kan man definera $f(0)$ så att f blir kontinuerlig?

3.19 Bestäm konstanterna A och B så att $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - Ax - B) = 0$.

3.20 Undersök (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x/2}{\ln x^2}$.

3.21 Undersök $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2 + x^3}$.

3.22 Visa att $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ med hjälp av standardgränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

3.23 Visa att $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$. (Tips: Variabelbyte)

3.24 Visa standardgränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln|x| = 0$ om $\alpha > 0$ med hjälp av $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x/e^x = 0$.

4 Derivator med tillämpningar

4.1 Definiera begreppet derivata.

4.2 Derivera

(a) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $(x - x^3)^{11}$ (c) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ (d) $y = \ln(-x)$

(e) $\ln|4x|$ (f) $x^2 \ln x$ (g) $e^{-2/x}$ (h) $\ln(1+x^2)$.

4.3 Derivera

(a) $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$ (b) $(\ln x)^3$ (c) $\ln \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $y = \exp(\sqrt{1+\ln x})$

(e) $y = xe^{-1/\sqrt{x}}$ (f) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ (g) $e^{-x}\cos x$ (h) $\tan x - x$

(i) $\ln|\tan \dfrac{x}{2}|$ (j) $(\arctan x)^2$ (k) $\arctan \dfrac{4}{x}$ (l) $\arcsin(x^2-1)$

4.4 Ange om möjligt en funktion som är
(a) kontinuerlig men inte deriverbar för $x = 2$
(b) deriverbar men ej kontinuerlig för $x = 2$.

4.5 Beräkna (a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\arctan(2+h) - \arctan 2}{h}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-4x) - \sin 1}{3x}$.

4.6 Bestäm ekvationerna för tangent respektive normal till kurvan $y = x + \sqrt{x}$ i punkten $(1, 2)$.

4.7 En cirkulär oljefläck utbreder sig på vattnet så att radien ökar med 5 m/h. Med vilken hastighet ökar oljefläckens area, då radien är 200 m?

4.8 Räkna ut höger- och vänsterderivatan av $(2 + |x|)e^x$ i $x = 0$. Existerar $f'(0)$?

4.9 Är f deriverbar om (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$?

4.10 Bestäm konstanterna A och B så att $f(x) = \begin{cases} Ae^x + Bx + x^2, & x \le 0 \\ \sqrt{x+1}, & x > 0 \end{cases}$ blir deriverbar.

4.11 Formulera och illustrera satsen om derivatan av en invers funktion.

4.12 Funktionen $f(x) = 1 + e^{2x}$ har en invers f^{-1} (varför?). Bestäm $(Df^{-1})(2)$
(a) genom att bestämma f^{-1} och derivera (b) utan att först bestämma inversen.

4.13 Ett ögonblick en solig eftermiddag står solen 27 grader över horisonten och sjunker med hastigheten 7,0 grader i timmen. Hur snabbt växer då skuggan av en 2,0 meter hög lodrät stolpe?

4.14 Räkna ut $f''(x)$ där den existerar om $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4.15 Faktorisera derivatan och bestäm med hjälp av teckentabell de intervall där f är strängt avtagande om (a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3(x^2+1)}$.

4.16 Rita grafen till funktionen $f(x) = (3-4x)e^{-2x^2}$. Ange alla lokala maxima och minima samt största och minsta värde, om sådana finns.

4.17 Bestäm alla lokala max- och minpunkter till f och rita kurvan om
(a) $f(x) = (2x+1)e^{-|x|}$ (b) $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$.

4.18 Låt $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

(a) Bestäm f:s värdemängd.

(b) Visa olikheten $\dfrac{x^2}{x-1} \geq 4$ då $x > 1$.

(c) Bestäm antalet skilda rötter till ekvationen $\dfrac{x^2}{x-1} = 5$.

(d) Bestäm antalet skilda rötter till ekvationen $\dfrac{x^2}{x-1} = k$ för olika värden på konstanten k.

4.19 Ange största och minsta värde till $f(x) = x \ln x - \dfrac{(\ln x)^2}{4} - x, \ \dfrac{1}{2} \leq x \leq e^2$.

4.20 Ett tält utan botten har väggar som utgörs av en cirkulär cylinder och tak bestående av en halvsfär. Bestäm största möjliga volym hos tältet, då tältdukens area A är given. Motivera noga varför det blir ett största värde.

4.21 Funktionen $y = f(x), \ x > 0$, är strängt växande och deriverbar. Vidare är $f(1) = 2, \ f(2) = 10, \ f'(1) = 3$ och $f'(2) = 5$. Är inversen f^{-1} deriverbar i punkten 2? Ange i så fall derivatan.

4.22 En likbent triangel är inskriven i en cirkel med radie R. Bestäm eventuellt största och minsta värde triangelarean kan ha. Motivera!

4.23 Formulera och illustrera medelvärdessatsen.

4.24 (a) Definiera vad som menas med att funktionen f är strängt avtagande på mängden M.
(b) Är det sant att $f' < 0$ på ett intervall I medför att f är strängt avtagande på I?
(c) Är det sant att $f' < 0$ på hela D_f medför att f är strängt avtagande?
(d) Är funktionen $f(x) = |x| - 2x$ strängt avtagande?

4.25 Visa eller ge ett motexempel till följande påståenden.
(a) $f \geq g \Rightarrow f' \geq g'$ (b) $f' \geq g' \Rightarrow f \geq g$.

4.26 För vilka reella tal gäller följande olikheter?
(a) $\dfrac{x}{1+x^2} - \arctan x \geq 0$ (b) $\ln(x) > \dfrac{x-1}{x}$ (c) $e^x - 1 < xe^x$.

4.27 I ett motell blir alla 80 rummen uthyrda varje natt om priset är 450 kr/dygn. En undersökning visade att för varje femtiolapp som lades på priset så blev 4 rum tomma. Varje uthyrt rum kostar ägaren 50 kr/dygn, varje outhyrt 20 kr/dygn. Vilket bör priset vara för att vinsten skall bli så stor som möjligt? Priset måste vara delbart med 50.

4.28 Visa att $x \mapsto \cos x + x^2/2$ är strängt växande för $x \geq 0$.

4.29 Är funktionen $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$ monoton på intervallet $]0, \pi/4[$?

4.30 Låt f vara en deriverbar funktion på $\mathbf{R}$ sådan att $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ och $\lim_{x\to\infty} f'(x) = B$ gäller, där A och B är ändliga. Visa att $B = 0$. Ge också exempel på en sådan funktion.

4.31 Är någon av funktionerna $|x| \sin x$ och $|x| \cos x$ kontinuerligt deriverbar?

4.32 (a) (Cauchys medelvärdessats). Antag att f och g är kontinuerliga på intervallet $[a, b]$ och deriverbara i $]a, b[$. Visa att det finns $\xi \in]a, b[$ sådan att

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Ledning: Använd medelvärdessatsen på $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

(b) (l'Hospitals regel). Om f och g är definierade och deriverbara med $g'(x) \neq 0$ i en punkterad omgivning av $x = 0$ samt om

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

så gäller att

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

förutsatt att det sista gränsvärdet existerar.
Ledning: Definiera $f(0)$ och $g(0)$ på lämpligt sätt och använd (a).

(c) Bestäm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$ (d) Bestäm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x+3}{x^3+2x+1}$.

4.33 Rita följande kurvor (a) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $y = \dfrac{1}{x} + 2\arctan x + \ln \dfrac{|x|}{1+x^2}$.

4.34 Visa att $\arctan(x+1) - \arctan x = \arctan \dfrac{1}{x^2+x+1}$ för alla reella x.

4.35 Visa att f har lokalt minimum i $x = 0$ om $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 2x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

4.36 I en punkt på kurvan $y = x^4$, $x > 0$, dras kurvans tangent och normal. Dessa avgränsar, tillsammans med y-axeln, en triangel. Bestäm alla värden som triangelns area kan anta.

4.37 Två gator med bredd a respektive b korsar varandra under rät vinkel. Hur lång är den längsta stång som i horisontellt läge kan föras från den ena gatan till den andra?

4.38 Bestäm antalet skilda reella rötter till följande ekvationer.
(a) $x^3 = x^2 - 5$ (b) $x = 3\ln x$ (c) $\arctan x = \ln(1+x)$ (d) $2\ln(1-x^2) = 1 + 4\arcsin x$.

4.39 Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x - 100$, $1 \leq x < 9$.

4.40 Visa att $\ln x \leq \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ för $x \geq 1$.

4.41 Funktionen f är deriverbar i ett intervall I och $f'(x) \geq 1$ för alla $x \in I$. Visa att

$$f(x) - f(y) \geq x - y$$

om $x \in I$, $y \in I$ och $x \geq y$.

4.42 Rita kurvan $y = \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}$ och ange värdemängden.

4.43 Bestäm alla tal B sådana att $x^4 + 4x + B \geq 0$ för alla reella tal x.

4.44 Avgör för vilka reella värden på a och b som ekvationen $e^x = ax + b$ har ingen rot, en rot eller två reella rötter. Ledning: tangent.

4.45 För vilka konstanter a är $f(x) = e^{-x} + a\ln x$ monoton?

4.46 Derivera $f(x) = \dfrac{e^{x^2}(\arcsin x)^2 x\sqrt{|\cos x|}}{(\ln x)^6 \sin^2 x}$. Ledning: $D \ln|f(x)| = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

4.47 Vilken är den minsta sektor i komplexa talplanet som rymmer alla tal $3 + \omega^2 - 2i\omega$, $\omega \in \mathbf{R}$, och som utgår från origo?

4.48 Skriv summan $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ på sluten form.

5 Primitiva funktioner

5.1 Räkna ut följande obestämda integraler:

(a) $\int \sqrt{x}\, dx$ (b) $\int \left(x^3 + x - 2\right) dx$ (c) $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx$ (d) $\int \frac{dx}{(x+2)^2}$

(e) $\int (x-2)\sqrt{x}\, dx$ (f) $\int e^{-x}\, dx$ (g) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$ (h) $\int \sin 2x\, dx$

5.2 Beräkna följande obestämda integraler

(a) $\int x\left(1+x^2\right)^5 dx$ (b) $\int xe^{x^2} dx$ (c) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ (d) $\int \frac{e^x}{2+e^x}\, dx$

5.3 Bestäm $f(x)$ så att

(a) $f'(x) = e^{2x} + x^2 - x$ och $f(0) = 0$ (b) $f'(x) = \dfrac{x}{\left(2+3x^2\right)^3}$ och $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$.

5.4 Beräkna

(a) $\int xe^{-x}\, dx$ (b) $\int x^2 \sin 2x\, dx$ (c) $\int x \ln|x|\, dx$

(d) $\int (\ln x)^2\, dx$ (e) $\int x\left(e^x + \ln x\right) dx$ (f) $\int \arctan x\, dx$

(g) $\int \arcsin x\, dx$ (h) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$ (i) $\int \tan x\, dx$

5.5 Beräkna $\int (4x^2 - 4x + 6)e^{-2x}\, dx$ genom att först göra variabelbytet $-2x = t$.

5.6 Räkna ut

(a) $\int \left(x^3 + x\right) e^{x^2} dx$ (b) $\int x^5 \cos x^3\, dx$ (c) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$ (d) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

5.7 Antag att f är definierad på ett intervall. Visa att om F och G är två primitiva funktioner till f så är $F(x) = G(x) + C$ för någon konstant C.

5.8 Linnéa gör följande kalkyl.

$$\begin{aligned}
\int \cos x\, \sin x\, dx &= \text{/P. I./} = \sin x\, \sin x - \int \sin x\, \cos x\, dx = \\
&= \text{/P. I./} = \sin x\, \sin x - \left((-\cos x)\, \cos x - \int (-\cos x)\,(-\sin x)\, dx\right) = \\
&= \sin^2 x + \cos^2 x + \int \cos x\, \sin x\, dx = \\
&= 1 + \int \cos x\, \sin x\, dx
\end{aligned}$$

Ur detta drar hon slutsatsen att $\int \cos x\, \sin x\, dx = 1 + \int \cos x\, \sin x\, dx$ d.v.s. $0 = 1$. Förklara var Linnéa tänkt fel.

5.9 Bestäm $f(x)$ så att $f'(x) = xe^{\sqrt{x}}$ för $x > 0$ och $f(1) = 0$.

5.10 Följande uttryck skall partialbråksuppdelas. Ange hur en korrekt ansats skall se ut.

(a) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ (b) $\dfrac{2x+3}{(x+4)^2}$ (c) $\dfrac{3}{(x+4)^2}$

(d) $\dfrac{x^2-2x+1}{(x+2)^3(x-3)^2}$ (e) $\dfrac{2x-4}{(x^2+x+5)^2(x-4)}$

5.11 Partialbråksuppdela $\dfrac{x+2}{x^3-1}$

5.12 Linus har just lärt sig handpåläggning och kommer fram till att

$$\frac{x^2 - x - 3}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}.$$

Linnéa hävdar dock att svaret inte stämmer. Vem har rätt?

5.13 Bestäm alla primitiva funktioner till

(a) $\dfrac{x^4}{x^2+1}$ (b) $\dfrac{1-x^2}{4+x^2}$ (c) $\dfrac{x^3+5x^2+2x-1}{x+3}$

(d) $\dfrac{2x-3}{x^2+4x+13}$ (e) $\dfrac{1}{x^2-1}$ (f) $\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$

5.14 Bestäm den primitiva funktion f till $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x^2}$ som uppfyller villkoret $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$.

5.15 Beräkna

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-8x^2+16}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+2x^2+5x}$ (f) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+4)(x^2+2x+4)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^3-5x^2-3x+12}{x^3+x-10}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}$

(i) $\displaystyle\int \frac{3-x^2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\,dx$

5.16 Bestäm $f(x)$ för $x > 1$ så att $f'(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^3(x-1)^2}$ och $f(2) = 0$.

5.17 Bestäm alla primitiva funktioner till

(a) $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$ (b) $\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^3}$

5.18 Räkna ut (a) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x\arctan x}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx$

5.19 Räkna ut

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(1+x^n\right)}$ för $x > 0$

(c) $\displaystyle\int x\left((\ln x)^2 + e^{-2x}\right)\,dx$ (d) $\displaystyle\int x\left(\ln\left(x^2+1\right) - x^2\right)\,dx$

5.20 Bestäm $f(x)$ för $x > 1$ så att $f'(x) = \dfrac{3x^2-6x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$ och $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

5.21 Beräkna

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{2-\sin^2 x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

(e) $\displaystyle\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx$ (f) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{\sin 2x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

(i) $\displaystyle\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$ (j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1+\cos x\right)^2}$ (k) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ (l) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$

5.22 Bestäm $f(x)$ då $f'(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$, $f(0) = 0$

5.23 Använd t ex Eulers formler eller partiell integration för att räkna ut

(a) $\displaystyle\int \sin 3x \sin 4x \, dx$ (b) $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx$ (c) $\displaystyle\int x e^{-x} \cos x \, dx$

5.24 Beräkna $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx \, dx$ då a och b är positiva konstanter.

5.25 Beräkna (a) $\displaystyle\int \frac{25\cos x}{4\cos x + 3\sin x}\, dx$ (b) $\displaystyle\int x \sin^3 x \, dx$

5.26 Beräkna $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ genom att

(a) göra variabelbytet $x = \sin t$ där $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ (b) partialintegrera.

5.27 Beräkna

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\, dx$ för $x > 1$ (e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ för $-1 < x < 1$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+2}\, dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$ (i) $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\, dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{x-4x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\, dx$ (k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ (l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}\, dx$

5.28 Räkna ut (a) $\displaystyle\int x\sqrt{x^4+2x^2+3}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \cos x \sqrt{\cos 2x}\, dx.$

5.29 Bestäm $f(x)$ så att $f'(x) = (x+1)\sqrt{2x-x^2}$ och $f(1) = 0$.

5.30 Bestäm $f(x)$ för $x > 0$ så att $f'(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$ och $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

5.31 Räkna ut

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + 1}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ (c) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

5.32 Låt f vara den primitiva funktion till $|\sin x|$ som uppfyller villkoret $f(-\pi) = 0$.

(a) Bestäm $f(x)$ då $x \in [-\pi, \pi]$. Var noga med att visa att f är en primitiv funktion.
(b) Bestäm $f(\pi)$.

5.33 Bestäm konstanterna a, b och c så att $\displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\, dx$ blir en rationell funktion.

5.34 Antag att $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ för $x < 1$ och att $f(x)$ där har minsta värdet 5. Visa att ekvationen $f(x) = 9$ har exakt två olika reella rötter $x < 1$.

5.35 Funktionen f är en primitiv funktion till $(1-x^2)e^{-x}$, $x \ge 0$ och $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Bestäm $f_{\min}$ och $f_{\max}$ om dessa existerar.

5.36 Låt f vara den primitiva funktion till $x^4 \sin^2 x$ vars graf går genom punkten $(1, 7)$. Är f monoton?

5.37 Härled en primitiv funktion till $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ genom att göra variabelbytet $x = \sinh t$.

5.38 Bestäm den primitiva funktion f till $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$ som är sådan att $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt[6]{x}}$ existerar (ändligt). Vad blir gränsvärdet?

5.39 Härled rekursionsformeln

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x\,\sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

för $n = 2,\ 3,\ \ldots$ genom att partialintegrera $\displaystyle\int \sin^n x\,dx = \int \sin x\,\sin^{n-1} x\,dx.$

Härled också motsvarande formel för $\displaystyle\int \cos^n x\,dx.$

6 Integraler med tillämpningar

6.1 Räkna ut följande integraler.

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^4-3x+1\right)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{5x+2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_1^2 (1+2x)^{17}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

(i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2\,dx$ (j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+3\sin x}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$ (l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

6.2 Visa, genom att skatta uppåt och nedåt med lämpliga trappfunktioner, att

$$\frac{1}{3} \le \int_0^1 \sqrt{\frac{3}{3+16x+8x^3}}\,dx \le \frac{3}{4}.$$

6.3 Formulera integralkalkylens medelvärdessats. Rita också en figur som illustrerar innehållet i satsen.

6.4 Bestäm $f'(x)$ då

(a) $\displaystyle f(x) = \int_0^x t^2\ln(t+1)\,dt\ ,\ x > -1$ (b) $\displaystyle f(x) = \int_x^1 \frac{t^4}{t^2+1}\,dt$

(c) $\displaystyle f(x) = \int_0^1 e^{t^2}\,dt\ ,\ x \in \mathbf{R}$ (d) $\displaystyle f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt\ ,\ x > 0$

6.5 Beräkna $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dx}{\ln(1+x)}.$

6.6 Beräkna

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \left|x^3-1\right|\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,|\cos x|\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(|x|^3+|x|^2\right)\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{10} (|x|+|x-1|+|x-2|)\,dx$

6.7 Räkna ut

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\cos\pi x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{3x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^3 \left(9x^2+4x\right)\ln x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2-x\right)|\sin\pi x|\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^5 \left|x^2-5x+6\right|e^x\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx$ (h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ (i) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^5 x\,dx$ (l) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$

6.8 Beräkna följande integraler.

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{10}{16-2x^2-x^3}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^3 |1-\ln x|\,dx.$

6.9 Beräkna följande integraler

(a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{x-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{8x^3+4x^2}{1+4x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}$

(d) $\displaystyle\int_2^6 \frac{2x+5}{x^2+2x-3}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^3+x^2+2x+2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2\,(x^2+3)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$ (h) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^4-1}$ (i) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2+2\,|x|+2}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^3 \frac{|x-1|}{1+|x-2|}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\cosh x}$

6.10 Beräkna

(a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arctan 2x}{(1-x)^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^3 x^2\ln\sqrt{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^6 x\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{(1+\cos x)^3}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{7\pi/3} \frac{dx}{5-4\cos x}$ (i) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[3]{x}+1)}$

(m) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$ (n) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2+2x-x^2}\,dx$ (o) $\displaystyle\int_2^5 \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx$

6.11 Visa att om f är kontinuerlig för alla x och om $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$ för alla $a>0$ så är f udda.

6.12 Beräkna $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

6.13 Vanlig trefasspänning består av tre sinusformade spänningar, fasförskjutna $2\pi/3$, samt en nollnivå. Effektivvärdet för spänningsskillnaden mellan en fas och nollan är 230 V. Beräkna effektivvärdet av spänningsskillnaden mellan två faser.

6.14 Beräkna följande generaliserade integraler, om de är konvergenta.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ (c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

6.15 Beräkna integralerna, om de är konvergenta.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}$ (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}$ (d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

6.16 Beräkna längden av kurvan $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $\dfrac{R}{2} \le x \le R$. Kontrollmöjligheter?

6.17 Ett område Ω ges i polära koordinater av $0 \le r \le R(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, där funktionen $R(\varphi)$ är kontinuerlig. Områdets area är då $A = \displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} R^2(\varphi)\,d\varphi$.

(a) Beräkna arean av området $0 \le r \le 1+\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Rita en figur, titta på arean av ett litet vinkelområde och troliggör areaformeln.

(c) Dela in vinkelområdet $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ i n lika stora delar. Bilda en under- och en översumma till arean av Ω, genom att på varje vinkelområde välja minimalt respektive maximalt R. Visa att båda dessa summor är riemannsummor till $\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} R^2(\varphi)\,d\varphi$.

6.18 En kurva ges i polära koordinater ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) av sambandet

$$r = \varphi^2 \ , \ 0 \le \varphi \le \pi.$$

Bestäm kurvans längd.

6.19 Kossan Rosa är bunden med ett snöre vid ett träd. Snöret har längden L och det cylindriska trädet har radien R. I startögonblicket står Rosa med snöret fullt sträckt, rakt radiellt ut från trädet. Rosa börjar vandra runt trädet, hela tiden med sträckt snöre. Hur långt har hon gått då hon kommer in till stammen?
(Såväl snörets tjocklek som Rosas utsträckning försummas.)

6.20 Området mellan kurvorna $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ och $y = e^{2x}$, $0 \le x \le 1$ roteras ett varv kring linjen $x = 2$. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer.

6.21 Området mellan kurvan $y = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$, $-3 \le x \le -1$ och kurvans horisontella tangent, roteras ett varv kring y-axeln. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer.

6.22 Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(1+\sqrt{k})} \ge \ln\frac{n}{4}$ för alla heltal $n \ge 1$.

6.23 Visa att $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt < x + \frac{x^4}{8}$ då $x > 0$.

6.24 Man vill stänga in $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$ mellan över- och undersummor genom att dela intervallet $[0,2]$ vid punkten $x = t$. Hur ska t väljas, om man vill få

(a) undersumman så stor som möjligt?

(b) översumman så liten som möjligt?

(c) skillnaden mellan översumman och undersumman så liten som möjligt?

6.25 Halvcirkeln $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$ roteras ett varv kring linjen $x = 2R$. Beräkna arean av den rotationsyta som uppkommer.

6.26 Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n} - 2$ för varje heltal $n \ge 1$.

6.27 Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n+n}{n} \right)^{1/n}$ (använd riemannsummor).

6.28 Man kan visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} \to \ln 2$ då $N \to \infty$. Bestäm, utgående från detta, något tal N sådant att $\displaystyle 0 < \ln 2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} < 10^{-4}$.

6.29 Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} \right) \le \frac{1}{2}$ för alla heltal $n \ge 1$.

6.30 Bestäm $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{p^2 + k^2}$ för varje heltal $p \ge 1$.

6.31 Man kan definiera den naturliga logaritmen $\ln$ som

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{för} \quad x > 0.$$

(a) Hur vet man att integralen existerar?

(b) Visa att $\ln x < x - 1$ då $x > 0$, $x \ne 1$.

(c) Visa att $V_{\ln} = \mathbf{R}$ (titta t.ex. på $\ln 2^n$ och $\ln 2^{-n}$ och vad som händer då $n \to \infty$).

Av detta följer att den definition som gavs i grundkursen är konsistent med denna ”nya” definition.

6.32 I analogi med förra uppgiften kan man definiera de trigonometriska funktionerna utgående från integraler. Låt v vara längden av bågen på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1, 0)$ till en punkt (x, y), där $x > 0$, $y > 0$.

(a) Visa att $\displaystyle v = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.

(b) Definiera $\cos v = x$, $\sin v = y$ och $\displaystyle\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ för dessa x , y och v. Visa att $\sin v < v < \tan v$.

7 Maclaurin- och Taylor-utveckling

7.1 Bestäm Taylor-polynomet av ordning 3 kring $x = 4$ till $\sqrt{x}$.

7.2 Bestäm Maclaurin-utvecklingen till och med grad 4 med restterm i ordoform (d.v.s. $\mathcal{O}(x^5)$ eller högre) till följande funktioner.
(a) e^{-x} (b) $\sin 2x$ (c) $x \arctan x$ (d) $(1+x)^{-1}$ (e) $\cos(x^2)$ (f) $\ln(1 - x^2)$.

7.3 Bestäm Maclaurin-utvecklingen av ordning 4 med rest i ordoform av

(a) $\sqrt{9+x^2}$ (b) $\ln(2-x)$ (c) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7.4 Räkna ut (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x^2)-1}{x^4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{\ln(1-x^2)}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{(\arctan x)^2}$.

7.5 Räkna ut (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x\cos\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}-\tan\frac{1}{x}}$.

7.6 Undersök $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$.

7.7 Bestäm konstanterna a, b och c så att följande gränsvärden existerar. Beräkna gränsvärdena!

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-ax}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-bx}{x^3}$ (c) $\dfrac{\cos x-e^{-x^2}+c\sin^2 x}{\sqrt[3]{1+3x^2}-\sqrt{1+2x^2}}$ då $x\to 0$.

7.8 Beräkna $f^{(20)}(0)$ och $f^{(21)}(0)$ då $f(x)=x\cos x^2$.

7.9 Att beräkna långa Maclaurin-utvecklingar av sammansatta funktioner kan bli arbetsamt om man inte går systematiskt till väga. Vi ska här utveckla $\ln(x+\cos x)$ med rest $\mathcal{O}(x^6)$ genom att utveckla $\ln(1+t)$ med lämpligt t.

(a) Maclaurin-utveckla $\ln(1+t)$ till och med grad 5 i t, alltså med rest $\mathcal{O}(t^6)$.

(b) Maclaurin-utveckla $t=x+\cos x-1$ till och med grad 5 i x.

(c) Beräkna i tur och ordning $t^2=t\cdot t$, $t^3=t^2\cdot t$, $t^4=t^3\cdot t$, $t^5=t^4\cdot t$, $\mathcal{O}(t^6)$, alla uttryckta i x och med rest $\mathcal{O}(x^6)$.

(d) Bestäm Maclaurin-utvecklingen av $\ln(x+\cos x)$, med rest $\mathcal{O}(x^6)$.

7.10 Bestäm ett polynom p av lägsta möjliga grad sådant att

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-p(x)}{x^2}=2$ (b) $\dfrac{e^{\sin x}-p(x)}{x^5}\to -1$ då $x\to 0$.

7.11 Man kan härleda Maclaurin-utvecklingen av ordning 6 för $\tan x$ med restterm i ordoform genom att ansätta en utveckling

$$\tan x = a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\mathcal{O}(x^7)$$

och sedan bestämma koefficienterna i utvecklingen med hjälp av kända utvecklingar och enkla samband.

(a) Motivera varför inga termer med jämna gradtal behövs i ansatsen.

(b) Använd utvecklingarna för $\sin x$ och $\cos x$ samt att $\cos x\tan x=\sin x$ för alla x.

(c) Använd utvecklingen för $\arctan x$ samt att $\tan(\arctan x)=x$ för alla x.

(d) Använd den i (b) eller (c) erhållna utvecklingen för att härleda Maclaurin-utvecklingen av ordning 7 för $\ln(\cos x)$ med restterm i ordoform.

7.12 Bestäm Maclaurin-polynomet av ordning 5 till (a) $\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\,dt$ (b) $\arcsin x$.

7.13 Räkna ut (a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x^2-(\ln x)^2}{x-\sqrt{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+2}{x-2}-4x^2\right)$.

7.14 Bestäm Taylor-utvecklingen av $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+7x-5$ med restterm i Lagranges form (a) kring $x=1$, ordning 2 (b) kring $x=0$, ordning 2 (c) kring $x=0$, ordning 4.

7.15 Bestäm Taylor-utvecklingen av ordning 0 kring a till en allmän funktion f, med restterm i Lagranges form. Hur blir uttrycket för $f(b)-f(a)$? Känns det bekant?

7.16 Vi ska nu titta närmare på exponentialfunktionen och i synnerhet talet e genom att använda oss av Maclaurin-utvecklingar.

(a) Visa först med hjälp av lämpliga över- och undersummor till $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ att $\ln 2 < 1 < \ln 4$ och därmed att $2 < e < 4$.

(b) Härled sedan Maclaurin-utvecklingen av ordning 3 för e^x med restterm i Lagranges form.

(c) Vilken (rationell) approximation till talet e får man med utvecklingen i (b)? Uppskatta felet i denna approximation. Använd resultatet i (a)!

(d) Slutligen, till vilken ordning måste man Maclaurin-utveckla e^x för att få en approximation till e med fel högst 10^{-7}? Ange approximationen!

7.17 Approximera följande tal med fel av högst 10^{-2}: (a) $\cos\dfrac{1}{10}$ (b) $\cos 1$.

7.18 (a) Härled Maclaurin-utvecklingen av ordning 4 med resttermen i Lagranges form för $\sin x$.

(b) Visa att $\left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)\right| \leq \dfrac{|x|^5}{120}$ för alla x.

(c) Visa att $\dfrac{x^5}{240} \leq \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) \leq \dfrac{x^5}{120}$ då $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$.

(d) Ange en liknande olikhet för $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq 0$.

(e) Visa att $\left|\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x^2}{6} - 1\right| \leq \dfrac{x^4}{120}$ för alla $x \neq 0$.

(f) Beräkna $f'(0)$ om f är kontinuerlig på hela $\mathbf{R}$ och $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ då $x \neq 0$.

7.19 Bestäm ett polynom som approximerar e^{-x^2} för $-1 \leq x \leq 1$ så att felets absolutbelopp blir mindre än 10^{-2} för alla dessa x.

7.20 Som bekant är $\dfrac{\pi}{6} = \arcsin\dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Vi ska använda detta samband för att få ett närmevärde till π.

(a) Maclaurin-utveckla $(1+t)^{-1/2}$ till och med grad 2 i t och med restterm i Lagranges form.

(b) Bestäm med hjälp av utvecklingen i (a) ett närmevärde till π och uttryck felet i approximationen som en integral.

(c) Visa att felets absolutbelopp är mindre än 10^{-2}.

7.21 Låt p_1 vara Maclaurin-polynomet av ordning 1 till $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + 3(x+2)\ln\dfrac{x+2}{2}$.

(a) Bestäm p_1. (b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p_1(x)}{x^2}$.

(c) Visa att $(\sqrt{3} - 1)x^2 \leq f(x) - p_1(x) \leq x^2$ för alla $x \in [-1, 1]$.

7.22 I relativitetsteorin talar man om en partikels vilomassa m_0, relativistiska massa m och energi E. Kopplingen är

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2},$$

där v är partikelns hastighet och c är ljushastigheten. (De två termerna i approximationen kallas vilo- respektive rörelseenergi.)
(a) Motivera approximationen. För vilka v är den bra?
(b) Uppskatta felet i approximationen då $|v| \leq c/10$ (vilket är ca 30.000 km/s).

7.23 Räkna ut ett närmevärde till $\sqrt[5]{33}$ med ett fel av högst 10^{-3}.

7.24 Visa att funktionen $f(x) = xe^{x^2}$ är inverterbar och bestäm Maclaurin-utvecklingen av inversen $f^{-1}(x)$ med rest $\mathcal{O}(x^7)$. (Att f^{-1} är tillräckligt deriverbar behöver ej motiveras.)

7.25 Undersök följande funktioner med avseende på lokalt extremvärde för $x = 0$.

(a) $\cosh x - \cos x$ (b) $\ln(1 - x^2) + \cos x + 3e^x - \arctan 3x$ (c) $\sin^2 2x + 2e^{-2x^2}$.

7.26 I många (tillämpade) sammanhang nöjer man sig med att för x nära 0 skriva $\sin x \approx x$ och $\ln(1 + x) \approx x$ och drar slutsatser av det. Viss försiktighet måste dock iakttas. Jämför uppgifterna 7.5a och 7.5b. Kommentar?

7.27 Bestäm ett bråktal C sådant att $0 \le \cosh x - 1 - \dfrac{x^2}{2} \le Cx^4$ för alla $x \in [-1, 1]$.

7.28 Man vill beräkna $\ln 2$ numeriskt med hjälp av Maclaurin-utveckling. Att använda utvecklingen för $\ln(1 + x)$ med $x = 1$ är en dålig väg (varför?), så i stället utvecklar man $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$. Approximera $\ln 2$ med ett fel av högst 10^{-4}.

7.29 Undersök $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$ då $n \to \infty$.

8 Differentialekvationer

8.1 Visa att $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sin x$ är en lösning till differentialekvationen

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0,\ x > 0.$$

(Bessels differentialekvation).

8.2 Givet (den homogena) differentialekvationen

$$(*) \qquad y'(x) + 2xy(x) = 0.$$

(a) Rita riktningsfältet och fundera över hur lösningskurvorna kan se ut.
(b) Bestäm en integrerande faktor och sedan alla lösningar till (*). Rita denna kurvskara.
(c) Bestäm den lösningskurva som går genom punkten $(1, 1)$.

8.3 Betrakta nu den inhomogena differentialekvationen

$$(**) \qquad y'(x) + 2xy(x) = 2x.$$

(a) Besvara samma frågor som i (b) och (c) i uppgift 8.2.
(b) Jämför den allmänna lösningen till (*) och (**). Slutsats?

8.4 Bestäm alla lösningar till de linjära differentialekvationerna

(a)	$y' = 3y + x^2$	(b)	$y' + 2xy = x$
(c)	$y' + 3x^2y = x^2$	(d)	$(1 + x^2)y' + 2xy = 2x$
(e)	$xy' + 2y = \sin x,\ x > 0$	(f)	$2xy' - y = x^2,\ x > 0.$

8.5 Betrakta differentialekvationen $y' = 2\dfrac{y}{x}$ på intervallet $x > 0$.

(a) Bestäm en integrerande faktor och sedan alla lösningar till differentialekvationen på de angivna intervallen. Rita lösningssskaran.

(b) Bestäm den lösningskurva som går genom punkten $(2, -3)$.

8.6 Antag att ϕ_1 och ϕ_2 är integrerande faktorer till samma differentialekvation

$$y' + f(x)y = g(x).$$

Visa att $\phi_1 = C\phi_2$, där C är en konstant.

8.7 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$(x^2 + x)y'(x) - y(x) = \ln x\ ,\ \ x > 0.$$

8.8 Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x}{1+x^2}, \quad x > 0,$$

som har ett ändligt gränsvärde (vilket?) då $x \to 0$.

8.9 (a) En kropp med temperaturen $T(0) = 60$ grader placeras i ett rum med konstant temperatur $T_0 = 20$ grader. Efter 20 minuter är kroppens temperatur $T(20) = 40$ grader. Bestäm kroppens temperatur efter ytterligare 20 minuter. Vad händer då $t \to \infty$? Matematisk modell: Avsvalningshastigheten antages vara proportionell mot skillnaden mellan kroppens och omgivningens temperatur.

(b) En allmän situation: Låt begynnelsetemperaturen $T(0)$, den konstanta rumstemperatur $T_0 < T(0)$ och kroppens temperatur $T(t_1)$ vid tiden $t = t_1 > 0$ vara givna, där $T_0 < T_1 < T(0)$. Bestäm då temperaturen $T(t)$ för $0 \leq t < \infty$.

8.10 Lös differentialekvationen

$$y' - (\tan x)y = \cos^2 x, \quad |x| < \pi/2.$$

Ange också den lösning, som är udda, dvs för vilken gäller $y(-x) = -y(x)$, $|x| < \pi/2$.

8.11 (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - 2\frac{y}{x} = \frac{5x}{x^2+2x+5}, \quad x > 0,$$

för vilken gäller $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)/x^2 = 0$.

(b) Låt y vara lösningen i (a). Visa att $y(x) < 0$ för alla $x > 0$.

8.12 Givet differentialekvationen $y' + g(x)y = h(x)$, där g och h är kontinuerliga funktioner och $g(a) \neq 0$, där a är en given konstant. Till varje lösningskurva drages tangenten i lösningskurvans skärningspunkt med linjen $x = a$. Visa att alla dessa tangenter har en gemensam punkt. Bestäm också denna.

8.13 Differentialekvationen $y' = 2\dfrac{y}{x}$, $x > 0$, från uppgift 8.5 är också separabel. Lös den med separation och jämför med din tidigare lösning.

8.14 Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2y' = y^2 + 2y + 1$ för vilken gäller (a) $y(-1) = 1$ (b) $y(-1) = -1$.

8.15 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = \dfrac{1+y}{x^2+x}$ för vilken gäller

(a) $y(-2) = 1$ (b) $y(1) = -1$ (c) $y(1) = -2$ (d) $y(-\frac{1}{2}) = 0$.

För vilka x existerar lösningarna? Rita lösningskurvorna!

8.16 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = \cos^2 y$, för vilken gäller $y(1) = \pi$. Rita lösningskurvan.

8.17 Lös differentialekvationen $e^y(1 + y') = 1$, $y(0) = \ln 3$.

8.18 Bestäm lösningen till differentialekvationen $y' = xy^2 + x$, $y(0) = 1$. I vilket största intervall kring 0 existerar lösningen? Rita lösningskurvan.

8.19 Lös differentialekvationen $(1 + x^2)^2 y' = xe^{2y}$, $y(0) = \ln 2$. För vilka x existerar lösningen?

8.20 Lös differentialekvationen $y' = \dfrac{y - y^3}{x^3 - x}$, $0 < x < 1$, med villkoret $y(1/2) = 1/2$.

8.21 Låt $y(x)$ vara lösningen till differentialekvationen

$$y' = 2x\sqrt{3 - 2y - y^2}, \quad y(0) = 0.$$

För vilka reella konstanter a existerar $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - ax^2}{x^4}$ ändligt? Beräkna också gränsvärdet.

8.22 Lös differentialekvationen

$$\frac{y'}{\sqrt{y+2}} = \frac{y+1}{1+x^2}, \quad y(0) = -7/4.$$

Enklast är att bestämma konstanten så snart som möjligt. Jämför med vad som händer om konstantbestämningen spars till sist.

8.23 (a) Den i uppgifterna 8.5 och 8.13 undersökta differentialekvationen $y' = 2\dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$, har formen $y' = f(\dfrac{y}{x})$, där f kontinuerlig. Bestäm alla lösningar genom att först bestämma den differentialekvation, som den nya obekanta funktionen $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ satisfierar.

(b) Lös differentialekvationen $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$, $y(1) = 1$. Lösningen får ges i implicit form.

8.24 Bestäm alla kontinuerligt deriverbara kurvor genom origo sådana att normalen i en godtycklig punkt (a, b) på kurvan skär y-axeln i punkten $(0, b + 2)$.

8.25 Lös differentialekvationen $y' = (x+y)^2$, $y(0) = 1$ genom att först bestämma den differentialekvation, som en ny obekant funktion $z(x) = y(x) + x$ satisfierar. I vilket största intervall omkring $x = 0$ existerar lösningen? Vad händer då x går mot detta intervalls ändpunkter?

8.26 (a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y' = 2\sqrt{y}$, $y \geq 0$, $y(0) = 0$. Rita lösningskurvorna. I detta fall får man flera lösningskurvor som går genom (0,0), vilket beror på att funktionen i högerledet inte är tillräckligt reguljär där.

(b) Visa att alla lösningskurvor genom (x_0, y_0) till differentialekvationen $y' = f(x, y)$ har samma tangent. Bestäm också tangentens ekvation.

8.27 Lös integralekvationen $\quad x - y(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{2ty(t)}{1+t^2}\,dt$

8.28 Visa att om y är en lösning till differentialekvationen

$$\text{(DE)} \quad \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

så satisfierar y integralekvationen

$$\text{(IE)} \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt.$$

Visa omvänt att om y är en kontinuerlig lösning till (IE) så är y en lösning till (DE). Funktionen f förutsätts kontinuerlig, vilket medför (se senare analyskurs) att $g(x) = f(x, y(x))$ är en kontinuerlig funktion. Detta får användas utan bevis.

8.29 Lös differentialekvationen $y' = \sqrt{2y - y^2}$. Finns det någon lösning, som är definierad för alla reella x och som uppfyller villkoret $y(0) = 1$?

8.30 Om luftmotståndet vid fritt fall antages proportionellt mot kvadraten på fallhastigheten $v(t)$ får man differentialekvationen $v'(t) = a - bv^2$, $v(0) = v_0$, där a och b är positiva konstanter. Rita riktningsfältet. Visa att hastigheten är en monoton funktion och att $\lim_{t\to\infty} v(t)$ existerar och är oberoende av utgångshastigheten v_0.

8.31 Antag att funktionen f är kontinuerlig och att y har kontinuerlig derivata för alla reella x. Visa att olikheten

$$y'(x) + f(x)y(x) \leq 0 \qquad \text{för alla } x$$

är ekvivalent med olikheten

$$y(b) \leq y(a) \exp\left(-\int_a^b f(t)\,dt\right) \qquad \text{för alla } a, b,\ b \geq a.$$

8.32 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

(a) $y' + 3y = 0$ (b) $y'' + 4y' + 3y = 0$
(c) $y'' + 4y' + 4y = 0$ (d) $y'' + 4y' = 0$.

Lös speciellt ekvationerna (b), (c) och (d) under villkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

8.33 Har differentialekvationen $y'' + 4y = 0$ någon icke-trivial lösning som uppfyller
(a) $y(0) = y(1) = 0$ (b) $y(0) = y(\pi) = 0$?

8.34 Lös differentialekvationen
(a) $y'' + 2y' + 5y = 0$ (b) $y'' + 2y = 0$.
Bestäm speciellt de lösningar som uppfyller villkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

8.35 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen
(a) $y'' + 2y' + 5y = x + e^{-x}\sin 2x$
(b) $y'' + 2y = f(x)$ där (i) $f(x) = \sin x - \cos x$ (ii) $f(x) = \sin x\sqrt{2}$.

8.36 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = x^2 + 1$ som uppfyller villkoret $y(0) = y'(0) = 0$.

8.37 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y = \sin x - \cos x$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

8.38 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 3y' - 4y = e^x + 4x - 7$.

8.39 Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' - 2y' - 15y = e^{-3x} + 1$ som är begränsade på intervallet $x \geq 0$.

8.40 (a) Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 2\sin x$ som tangerar x-axeln i origo.
(b) Vilka lösningar till denna differentialekvation har lokalt maximum för $x = 0$?

8.41 Lös differentialekvationen $y''' + y'' + y' + y = x + 1 + \cos x$.

8.42 Lös differentialekvationen $y^{(4)} = y$.

8.43 Bestäm den allmänna lösningen till $y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} + y' + y = 0$.

8.44 Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen $y''' + 2y'' + y' = (x+1)e^x$ som tangerar x-axeln i origo och där har andraderivatan lika med 0.

8.45 Låt $P_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$. Formulera och bevisa en sats om hur man bestämmer den allmänna lösningen till den linjära differentialekvationen $P_n(D)(y) = h(x)$ med hjälp av en partikulärlösning till denna ekvation och lösningarna till den homogena ekvationen.

8.46 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + y' - 6y = e^{3x}$ sådana att $y(0) = 2$ och gränsvärdet då $x \to -\infty$ existerar ändligt. Hur ser det ut om kravet i stället är att gränsvärdet då $x \to +\infty$ existerar ändligt?

8.47 Har differentialekvationen $y'' - 4y' + 8y = xe^{2x}\sin 2x$ någon lösning som har lokalt extremvärde 1 för $x = 0$? Avgör i så fall om detta är ett lokalt maximum eller lokalt minimum och om lösningen har ett största eller minsta värde för $-\infty < x < \infty$.

8.48 Ange en differentialekvation, som har den allmänna lösningen $y = (A+x)e^x + (B+Cx)e^{-x}$.

8.49 (a) Visa att varje homogen linjär differentialekvation av ordning 3 med konstanta reella koefficienter har minst en lösning av formen $y = e^{cx}$, c reell.

(b) Hur generaliseras detta till ekvationer av godtycklig ordning?

(c) Visa att varje lösning till den linjära differentialekvationen $P_n(D)(y) = 0$ med konstanta koefficienter har gränsvärdet 0 då $x \to +\infty$ om och endast om alla rötter till den karakteristiska ekvationen har realdel < 0.

(d) Hur ser villkoret på den karakteristiska ekvationens rötter ut om ”har gränsvärdet 0 då $x \to +\infty$” byts mot ”är begränsad då $x \to +\infty$”?

8.50 Bestäm alla deriverbara funktioner på hela $\mathbf{R}$ som där uppfyller
(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (b) $f(x+y) = f(x)f(y)$.

8.51 (a) Beteckna med $y_1(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + f(x)y = g(x)$, $y(0) = C_1$ och med $y_2(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + f(x)y = g(x)$, $y(0) = C_2$, där f och g är kontinerliga funktioner definierade på hela reella axeln. Visa att

$$y_1(x) - y_2(x) = (C_1 - C_2)\exp\left(-\int_0^x f(t)\,dt\right).$$

(En liten ändring av begynnelsevärdet ger alltså på begränsade intervall en liten ändring av lösningen.)

(b) Beteckna med $y_1(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + y = g_1(x)$, $y(0) = A$ och med $y_2(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + y = g_2(x)$, $y(0) = A$, där högerleden g_1, g_2 är kontinerliga funktioner definierade på hela reella axeln och är sådana att skillnaden $g = g_1 - g_2$ är begränsad: $|g(x)| \leq M < \infty$ för alla reella x. Visa olikheten

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq M|1 - e^{-x}|.$$

(En liten ändring av högerledet ger alltså på begränsade intervall en liten ändring av lösningen.)

8.52 Lös differentialekvationen $y'' - y = f(x)$, $y(0) = y'(0) = 0$, där $f(x) = 0$ för $x \leq 1$ och $f(x) = 1$ för $x > 1$. Eftersom högerledet har ett språng i $x = 1$, vilket en derivata aldrig kan ha, saknar differentialekvationen lösning i vanlig mening. Man söker då ”den bästa möjliga lösningen” genom att kräva att den sökta funktionen och dess förstaderivata skall vara kontinuerliga i $x = 1$. Bestäm denna generaliserade lösning y. Visa att andraderivata saknas i $x = 1$. Beräkna också $\Delta = \lim_{x\to 1+} y''(x) - \lim_{x\to 1-} y''(x)$ och jämför med differentialekvationen.

8.53 Lös på samma sätt som i uppgift 8.52 differentialekvationen $y'' + y = f(x)$, $y(0) = y'(0) = 0$, där $f(x) = x^2$ för $x \leq \pi$ och $f(x) = \pi^2$ för $x > \pi$. Högerledet är alltså kontinuerligt. Visa att denna funktion y är två gånger deriverbar i $x = 1$. Finns tredjederivata där?

8.54 Lös differentialekvationen $y'' - y = f(x)$, $y(0) = y'(0) = 0$, där $f(x) = e^{x-1}$ för $x \leq 1$ och $f(x) = 1$ för $x > 1$. Högerledet är alltså kontinuerligt. Visa att lösningen är två gånger deriverbar i $x = 1$. Finns tredjederivata där?

8.55 Betrakta de två differentialekvationerna
(1) $y'' + (\cos x)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
(2) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
För små värden på variabeln x skiljer sig de båda differentialekvationerna endast litet från varandra, och man kan då förmoda att deras lösningar har samma egenskap. Vilken är den första termen i maclaurinutvecklingen av lösningen till (1) som skiljer sig från motsvarande i (den kända) maclaurinutvecklingen av lösningen till (2)? Att lösningen till (1) har maclaurinutveckling av godtycklig ordning får användas utan bevis.

8.56 (a) Givet differentialekvationen (1) $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$, där funktionerna a, b, f är kontinuerliga. Eftersom koefficienterna inte är konstanta duger inte de tidigare framtagna lösningsmetoderna. Följande fungerar: Antag att man har funnit en lösning $y = v(x)$ till den homogena ekvationen $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ (En sådan kan man oftast finna i serieform — mer om detta i senare analyskurs). Gör i (1) ansatsen $y = v(x)z$, härled differentialekvationen för den nya obekanta funktionen z och ange hur den kan lösas.

(b) Lös Bessels differentialekvation $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$, $x > 0$ genom att tillämpa ovanstående metod (jämför uppgift 8.1).

9 Blandade problem

9.1 Funktionen f uppfyller differentialekvationen $f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = 0$.

(a) Bestäm alla möjliga sådana funktioner f.

(b) Låt $\alpha > 0$ vara en konstant. Bestäm den funktion f vars graf tangerar linjen $y = \alpha x$ i origo. Visa också att denna funktion uppfyller $f(x) \geq 0$ då $x \geq 0$.

(c) Bestäm konstanten α så att tillhörande funktion f har största värdet 1 för $x \geq 0$.

(d) Bestäm arean av området mellan positiva x-axeln och grafen till funktionen f från (c).

(e) Bestäm volymen av den kropp som genereras då området i (d) roteras ett varv kring x-axeln.

9.2 Rita kurvan $f(x) = 4 \arctan 2x + \frac{1}{x}$, $x > 0$. Ange alla lokala extremvärden, samt eventuella största och minsta värden.

9.3 Bestäm Maclaurin-utvecklingen av $(\ln(1 + x))^3$. Utveckla så långt att man ser de tre första icke-försvinnande termerna.

9.4 Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$, roterar ett varv kring (a) x-axeln (b) y-axeln (c) linjen $y = -2$ (d) linjen $x = 2\pi$.

9.5 Visa att $\ln(1 + x) > \dfrac{3x}{x + 4}$ för alla $x > 0$.

9.6 Betrakta differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = x + e^{-x}$.
(a) Bestäm den lösning som går genom origo och som har horisontell tangent där.
(b) Avgör om lösningen i (a) har extremvärde i origo.

9.7 Härled Maclaurin-utvecklingen av ordning 4 för e^x med restterm i Lagranges form. Approximera $\sqrt{e}$ med hjälp av denna utveckling och visa att approximationsfelet är mindre än 10^{-3}.

9.8 Visa att $1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

9.9 Bestäm alla funktioner $y(x)$ sådana att $(x+1)y' - y = \ln x$, $x > 0$. Uppfyller någon av dessa villkoret $y'(x) \to 1$ då $x \to \infty$?

9.10 Vilka värden kan $2 \arcsin \sqrt{x} - \arcsin(2x - 1)$ anta?

9.11 Betrakta kurvan $y = \frac{x^2}{2} + x$, $0 \leq x \leq 1$.

(a) Hur lång är kurvan?
(b) Kurvan roterar ett varv kring linjen $x = -1$. Beräkna arean av rotationsytan.

9.12 Beräkna (a) $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ (b) $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x/2) - 1}{(x-1)^2}$ (c) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 + x})$.

9.13 Bestäm Maclaurin-utvecklingen av ordning 5 med restterm i ordoform för $\cos(\sin x)$. Ange också en utveckling för $\int_0^x \cos(\sin t)\, dt$.

9.14 Hur många olika reella rötter har ekvationen $(2 + 2x + x^2)e^{-x} = 1$?

9.15 Bestäm funktionen $g(x)$ i en omgivning till $x = 0$ om $g'(x) = g(x)^2 + g(x)$ där, och om dessutom (a) $g(0) = -1/2$ (b) $g(0) = -1$.

9.16 Visa att $1 \leq \int_0^1 3x^2 \sqrt{1 + x^4}\, dx \leq \sqrt{2}$.

9.17 Beräkna (a) $\int x \sin(x^2) e^{x^2}\, dx$ (b) $\int \frac{3x^4\, dx}{x^3 + 1}$ (c) $\int \frac{dx}{2 \sin x + \sin 2x}$.

9.18 Bestäm ett polynom $p(x)$ som approximerar $\cos x$ för $-1/2 \leq x \leq 1/2$ så att felets absolutbelopp blir mindre än 10^{-2} för alla dessa x.

9.19 Bestäm y så att $y''(x) = 1/x$ för $x > 0$ och $y(x) \geq y(1) = 0$ för alla $x > 0$.

9.20 Rita kurvan $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2|x - 2|}$. Ange alla lokala extremvärden samt största och minsta värden, om de existerar.

9.21 Låt

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Bestäm konstanten a så att f blir kontinuerlig i punkten $x = 0$. Undersök även om $f'(0)$ existerar med detta val av a.

9.22 Bestäm konstanterna a och b så att $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + bx) + 2e^x - 2\cos(ax)}{x^3}$ existerar ändligt, samt bestäm gränsvärdet.

9.23 Undersök antalet olika rötter till ekvationen $\frac{e^x}{x + 2} = k$ för olika värden på konstanten k.

9.24 Bestäm $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin kx\, dx$ för $k = 1, 2, \ldots$

9.25 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $xy' + 2y = \frac{3x^3}{x^3 + 1}$, $x > 0$, sådana att $x^2 y(x) \to 0$ då $x \to 0+$.

9.26 Beräkna (a) $\lim_{x \to +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x})$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^5} \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt - x + \frac{x^3}{3} \right)$.

9.27 Beräkna (a) $\displaystyle\int e^{-x}\sin^2 x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin^2 x\,dx$.

9.28 Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = 5 - 2e^{-x} + 3e^{-2x}\cos 2x$.

9.29 Bestäm värdemängden för $f(x) = \tan x + 2\sin x - 3x$, $0 \le x < \pi/2$.

9.30 Beräkna (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - \arctan x}{2x(\cosh(x^2) - 1)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2 - 1}$.

9.31 Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{5x}{4} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ med angivande av definitionsmängd och lokala extremvärden.

9.32 Lös differentialekvationen $y^{(3)} - 3y' + 2y = \cosh x$.

9.33 Beräkna (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)\cdot\ln\frac{1}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x + 3 - x^2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x} - e^{1-x/2}}{1 - \cos x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\sin\frac{1}{x} + \arctan x^3}{x^2\cos\frac{1}{x} + \ln(1 + x^4)}$.

9.34 Räkna ut $\displaystyle\int_0^\infty\frac{xe^x\,dx}{(e^x + 1)^2}$.

9.35 Visa att funktionen $f(x) = x - \ln x$, $x > 1$, är inverterbar. Om ϕ betecknar inversen, beräkna $\phi'(e^2 - 2)$.

9.36 Låt $f(x) = x\dfrac{e^{1/x} - e}{x - 1}$. Undersök gränsvärdet av $f(x)$ då
(a) $x \to 1$ (b) $x \to \infty$ (c) $x \to 0^+$ (d) $x \to 0^-$.

9.37 Bestäm största värdet av funktionen $f(x) = e^x - \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$, $x \ge 0$. Svaret får innehålla en integral.

9.38 Hur många positiva lösningar har ekvationen $x^{1/x} = a$ för olika värden på konstanten a?

9.39 Visa att $(x + 1)\ln\dfrac{x + 3}{x + 1} > 1$ för alla $x \ge 0$.

9.40 Ange en differentialekvation som har allmänna lösningen

$$y = Ae^{-2x} + e^{-x}(1 + B\cos 3x + C\sin 3x).$$

9.41 Bestäm konstanten A så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} A\arctan x, & x \le 1, \\ \dfrac{\ln x}{x - 1}, & x > 1, \end{cases}$$

blir kontinuerlig. Blir den också deriverbar i $x = 1$?

9.42 Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x + ax^2) - 1 + \ln(1 + ax)}{1 - \cos x}$ existerar och är ändligt. Beräkna också gränsvärdet.

9.43 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen i uppgift 9.32 som har strängt lokalt maximum då $x = 0$ och som uppfyller $e^{2x}y(x) \to 0$ då $x \to -\infty$.

9.44 Visa att $\dfrac{\tan x}{\tan y} < \dfrac{x}{y}$ då $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$.

9.45 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $(x^2 + x)y' - y = x^2 \cos\sqrt{x}$, $x > 0$. Finns någon lösning som dessutom uppfyller villkoret att y/x^2 har ändligt gränsvärde då $x \to 0+$? Bestäm i så fall även denna lösning och tillhörande gränsvärde.

9.46 Betrakta åter området i uppgift 9.4. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer när detta område roterar ett varv kring linjen $y = 1/2$.

9.47 Vilket är det minsta värdet på konstanten C sådant att $e^{-2x} - e^{-4x} \le Ce^{-x}$ för alla positiva x?

9.48 Visa att funktionen

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-u^2}}{u}\,du, \quad x > 0,$$

har ett största värde och ange var detta värde antas.

9.49 Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara tal sådana att $0 < a_k < 1$ för alla k. Bilda produkterna $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ och summorna $s_n = \sum_{k=1}^{n}(1-a_k)$. Man ser genast att p_n är strängt avtagande och att s_n är strängt växande och därmed att gränsvärdena då $n \to \infty$ existerar; naturligtvis är $0 \le \lim_{n\to\infty} p_n < 1$ och $0 < \lim_{n\to\infty} s_n \le \infty$. Visa att $\lim_{n\to\infty} s_n < \infty$ om och endast om $\lim_{n\to\infty} p_n > 0$.

9.50 Visa att $\sin x > \arctan x$ då $0 < x < 1$.

10 Teorifrågor

10.1 Definiera vad som menas med att $f(x) \to A$ då $x \to \infty$.

10.2 Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i punkten x_0.

10.3 Formulera satsen om mellanliggande värden. Rita också en figur som illustrerar innehållet i satsen.

10.4 Formulera satsen om största och minsta värde.

10.5 Definiera vad som menas med att en funktion f är deriverbar i punkten x_0.

10.6 Formulera kedjeregeln.

10.7 Formulera satsen om inversens derivata. Rita också en figur som illustrerar satsen.

10.8 Definiera vad som menas med att en funktion f har ett lokalt maximum i x_0.

10.9 Formulera en sats om derivatan i en extrempunkt.

10.10 Formulera differentialkalkylens medelvärdessats. Rita också en figur som illustrerar innehållet i satsen.

10.11 Definiera vad som menas med att F är en primitiv funktion till f på intervallet I.

10.12 Formulera satsen om partiell integration för bestämning av primitiv funktion.

10.13 Formulera satsen om variabelsubstitution för bestämning av primitiv funktion.

10.14 Vad menas med en trappfunktion, och hur definieras integralen av en sådan?

10.15 Vad menas med att en funktion är integrerbar?

10.16 Formulera triangelolikheten för integraler.

10.17 Formulera integralkalkylens medelvärdessats. Rita också en figur som illustrerar innehållet i satsen.

10.18 Formulera analysens huvudsats.

10.19 Formulera insättningsformeln för integraler.

10.20 Låt f vara kontinuerlig, avtagande och positiv för $x \geq 1$. Härled en uppskattning av summan $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ med hjälp av integralen $\int_1^n f(x)\,dx$. Hur ändras resultatet om f istället är växande?

10.21 Formulera Maclaurins formel med restterm i Lagranges form.

10.22 Definiera vad som menas med att $f(x) = \mathcal{O}(x^N)$.

10.23 Formulera och bevisa en sats om hur man finner den allmänna lösningen till en linjär differentialekvation med hjälp av en partikulärlösning och lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Svar

Reella och komplexa tal

1.1 (a) $a^2 + a - b - 1$ (b) $4x^2 - 7x + 6$

1.2 $\dfrac{3}{26}$ resp. $\dfrac{96}{13}$.

1.3 (a) Mgn $= 420$, summan $= \dfrac{2}{15}$ (b) Mgn $= (x^2+1)(x+1)(x-1)$, summan $= \dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$

1.4 0

1.5 $a^2 - 4ab + 6ac + 4b^2 - 12bc + 9c^2$

1.6 (a) $x(x-1)(x+1)$ (b) $3xy^2(x-2y^2)(x+2y^2)(x^2+4y^4)$

1.8 (a) $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$, minsta värde $= \dfrac{3}{4}$ antas för $x = -\dfrac{5}{2}$

(b) $\dfrac{15}{2} - 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$, största värde $= \dfrac{15}{2}$ antas för $x = \dfrac{3}{2}$

1.9 $a = 2$, $b = 1/2$: Alla $x \neq 1/2$ är lösningar, $a = 2$, $b \neq 1/2$: Lösning saknas, $a \neq 0, 2$, $b = 1/a$: Lösning saknas, $a \neq 0, 2$, $b \neq 1/a$: $x = \dfrac{1-2b}{a-2}$, $a = 0$: $x = b - 1/2$.

1.10 (a) $x = -1$ (b) $x = 0$, $x = 1$

1.11 $x = \dfrac{a+1}{a-3}$ om $a \neq 3$ och $a \neq 1$, ingen lösning om $a = 3$ eller $a = 1$.

1.12 $x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

1.13 $a < \dfrac{81}{4}$

1.14 (a) $x = a$, $x = b$

(b) $x = \dfrac{a}{b}$, $x = \dfrac{b}{a}$ om $a \neq 0$ och $b \neq 0$,
$x = 0$ om $a \neq 0$ och $b = 0$ eller $a = 0$ och $b \neq 0$,
alla reella tal x om $a = b = 0$.

1.15 16

1.16 (a) Ja, på linjen $y = -\dfrac{3x}{2} + \dfrac{5}{2}$ (b) Nej

1.17 Cirkel med medelpunkt $(2, 0)$ och radie 2

1.18 Medelpunkt $\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$, radie $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$, om $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Punkten $\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$, om $a^2 + b^2 - 4c = 0$, ingenting om $a^2 + b^2 - 4c < 0$.

1.19 (a) $x = -1$ (b) $x = 0$ och $x = -2$ (c) Lösning saknas

1.20 (a) $x = 1$ (b) ingen lösning (c) $x = -1$, $x = 3$

1.21 (a) Ingen reell lösning (b) $x = -3 \pm \sqrt{65}$

1.22 $1 \leq x \leq 2$

1.23 (a) $1 - \dfrac{2}{x^2+1}$ (b) $x^3 + x^2 + x + 1$ (c) $\dfrac{-3x+5}{x^2-7}$ (d) $x^2 - 2x + 3 + \dfrac{-2x+10}{x^2+4x+5}$.

1.24 (a) $x^2 + 4x - 5 - \dfrac{7}{x-3}$ (b) $x - 5 + \dfrac{5-3x}{x^2-3x+1}$

1.25 (a) 0 (b) $2^{100} - 2^{67} - 2^{32} + 2^{10} + 1$ (c) $1 - x$.

1.26 (a) $(x-7)(x+9)$ (b) $(x-1)(x-3)^2$

1.27 (a) Ja (b) Nej

1.28 (a) $x = 1$, $x = 2$, $x = -3$ (b) $x = 2$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$
(c) $x = 2$, $x = 3$, $x = -5$ (d) $x = -1$, $x = 2$, $x = -1 \pm \sqrt{6}$

1.30 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = b$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c$.

1.31 (a) $x = -4$, $x = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (b) $x = \dfrac{3}{4}$

1.32 $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $x = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $y = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$; $x = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

1.33 (a) $x < \dfrac{3}{2}$ (b) $x < 4$ (c) $x \geq 1$ eller $x < -1$
(d) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ (e) $x \geq \sqrt{5}$ eller $x \leq -\sqrt{5}$ (f) $1 \leq x \leq 3$

1.34 Minsta värdet är $-\dfrac{5}{4}$ för $x = \dfrac{3}{2}$.

1.35 (a) Likhet då $x = 1$ (b) Likhet då $x = y$

1.36 Största värdet är 25 då båda talen är 5. (Kvadratkomplettering.)

1.37 (a) $1 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 2$ (b) $3 - (x+2)^2 = -x^2 - 4x - 1$

1.38 (a) $x \neq 5$ (b) $x > \dfrac{3}{2}$, $0 < x < 1$ eller $x < -2$ (c) $x \geq 2$ eller $x < 0$
(d) $x \geq 2$ eller $x = -1$ (e) $x \leq 4$ (f) $x > 1$ eller $x < 0$

1.39 (a) $x < -2$ eller $-1/2 < x < 1$ (b) $-3 < x \leq -1$ eller $-1/2 < x \leq 7$
(c) $x < -4$, $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 2$ (d) $-\dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{1}{2}$ eller $1 \leq x < 2$

1.40 (a) $a = 2$, $b = 1$ (b) $a = 1$, $b = 2$ (c) $a = b = 1$ (d) Inga värden på a och b duger

1.41 (a) T ex $\omega = 10$. Alla $\omega > 10$ duger också.
(b) T ex $\omega = 1/\sqrt{\epsilon}$. Alla $\omega > 1/\sqrt{\epsilon}$ duger också.

1.42 $0 \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{8}}$

1.43 (a) 1 (b) 17 (c) $\dfrac{1}{72}$ (d) $\dfrac{81}{64}$ (e) $\dfrac{81}{64}$

1.44 (a) $x = -5$ och $x = 1/3$ (b) $x = 4$ (c) $x = -3$ och $x = 5/2$

1.45 (a) $x = -1$, $x = -\dfrac{7}{3}$ (b) $x = -2$, $x = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$

1.46 (a) $-2 < x < 4$ med $x \neq 1$ (b) $x \leq 1$ med $x \neq -1$
(c) $\sqrt{2} < x < \sqrt{6}$ eller $-\sqrt{6} < x < -\sqrt{2}$ (d) $x < -1$ eller $x > 1$

1.47 $(|x-a|<d \iff a-d<x<a+d)$

1.48 (a) $(|x|\le 1 \iff x^2\le 1)$ (b) $(|x|\le 1 \Rightarrow |x^3|\le x^2)$

1.49 (a) $x=-2+\sqrt{7}$, $x=-1$, $x=-3$

(b) Ingen lösning om $a>0$, alla $x\ge 0$ om $a=0$, $x=-\dfrac{a}{2}$ om $a<0$

1.50 $c=2$ ger lösningarna $-1/2, 0$ och 1.

1.51 (a) $2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+5\cdot 2^5=256$ (b) $1+1+1+\cdots+1+1=k$ (k termer)

1.52 (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}k^3$ (b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{49}\frac{1}{2k+1}$ (c) $\displaystyle s_n=\sum_{k=0}^{n}k^2,\quad n=0,1,2,\dots.$

1.53 (Skriv ut termerna i summorna.)

1.54 Aritmetiska summor, bestäm första och sista termen och antalet termer.

(a) $\dfrac{(n-1)n}{4}$ (b) $\dfrac{(n-m+1)(3m+3n+2)}{2}$ (c) 0

1.55 Geometriska summor, bestäm första termen, kvoten och antalet termer.

(a) $3-\dfrac{1}{3^n}$ (b) $\dfrac{4(2^{99}+1)}{3}$

1.56 $n>\dfrac{\ln 11}{\ln 1.1}-1\approx 24.16$ $\left(\dfrac{(1.1)^{n+1}-1}{1.1-1}>100\right)$

1.58 Första term $\dfrac{32}{3}$, kvot $\dfrac{1}{2}$ eller första term 32, kvot $-\dfrac{1}{2}$

1.59 (a) $4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(2n)$ (b) $2^0\cdot 2^{-1}\cdot 2^{-2}\cdot\ldots\cdot 2^{-100}=2^{0-1-2-\cdots-100}=2^{-5050}$

(c) $\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n+1}{n}=n+1$

1.60 $\displaystyle\prod_{k=2}^{19}(-1)^k k$

1.61 $\binom{4}{1}=4$, $\binom{4}{2}=6$, $\binom{4}{3}=4$, $\binom{5}{1}=5$, $\binom{5}{2}=10$, $\binom{5}{3}=10$, $\binom{5}{4}=5$

1.62 (a) 210 (b) 715 (c) $\dfrac{n(n^2-1)}{6}$.

1.64 (a) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

(b) $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$

(c) $64x^{12}-192x^9+240x^6-160x^3+60-\dfrac{12}{x^3}+\dfrac{1}{x^6}$.

1.65 Endast för $x=-3$.

1.66 (a) $2+6i$ (b) $4-2i$ (c) $3-12i$ (d) -1 (e) 2

(f) $-1-4i$ (g) $-11+10i$ (h) $\sqrt{13}$ (i) $\dfrac{5}{17}-\dfrac{14}{17}i$

1.67 $|z|^2=|z^2|=13$, $z^2=-5+12i$

1.68 $\dfrac{3}{25}$ resp. $-\dfrac{4}{25}$

1.71 $i^0=1$, $i^{-1}=-i$, $i^{-2}=-1$, $i^{-3}=i$, $\ldots$.
$i^{-4k}=1$, $i^{-(4k+1)}=-i$, $i^{-(4k+2)}=-1$, $i^{-(4k+3)}=i$, $k=0,1,2,\dots.$

1.72 (a) $z^{-1} = i, \quad z^{-2} = -1, \quad z^{-3} = -i$ (b) $z^{-1} = \dfrac{1+i}{2}, \quad z^{-2} = \dfrac{i}{2}, \quad z^{-3} = \dfrac{-1+i}{4}$
(c) $z^{-1} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}, \quad z^{-2} = \dfrac{a^2-b^2-2iab}{(a^2+b^2)^2}, \quad z^{-3} = \dfrac{a^3-3ab^2+i(b^3-3a^2b)}{(a^2+b^2)^3}$

1.73 (a) $z = 4+4i$ (b) $z = 1 - \dfrac{i}{7}$ (c) $z = 2-i$ (d) $z = -\dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}i$ (e) $z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}i$

1.74 z ligger längst från origo

1.75 (a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{1}{5^6}$

1.77 $x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$
(samma tecken om $b > 0$, motsatt tecken om $b < 0$)

1.78 $z = 1+i$, $z = -2+i$

1.79 (a) $z_{1,2} = \pm(3-2i)$ (b) $z_1 = i$, $z_2 = 1+2i$.

1.80 $z^2 + (2b-a^2)z + b^2 = 0$.

1.81 $P(z) = (z^2+1)(5z+3)$.

1.82 $z_{1,2} = 2 \pm i$, $z_{3,4} = -1 \pm 2i$.

1.83 $p(z) = (z-1)^3\left(z + \dfrac{3+i\sqrt{15}}{2}\right)\left(z + \dfrac{3-i\sqrt{15}}{2}\right) = (z-1)^3(z^2+3z+6)$.

1.84 $a_0 = 5$, $a_1 = -4$, $a_2 = 11$, $a_3 = -8$, $a_4 = 7$, $a_5 = -4$.

1.85 $z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$, $z_3 = 1/2$, $z_4 = -6$.

1.86 $z_{1,2} = 1 \pm 2i$, $z_{3,4} = \pm i\sqrt{7}$.

1.87 (a) $z_{1,2,3,4} = \pm 2 \pm i$ (b) $z_k = \sqrt[6]{2}\exp i(\pm\pi/12 + 2k\pi/3)$, $k = 0, 1, 2$.

1.88 $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm(1+i)\sqrt{3}$, $z_{4,5} = \pm(1+i)/\sqrt{3}$.

1.89 $a = 2$, nollställen $\pm i$, $-1 \pm i$.

1.90 $z^6 - 3z^4 + 4$ (eller en rationell multipel därav).

1.91 $a = 1$, rötter 0, $1-i$, $-1-i$, $-2i$; $a = -4$, rötter ± 1, $\pm 1 - 2i$.

Funktioner m.m.

2.1 (a) Ja, $g^{-1}(x) = f^{-1}(x+2)$, $x \in \mathbf{R}$ (b) Ja, $g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$, $x \neq 0$ i $\mathbf{R}$
(c) Nej, g är inte injektiv, ty $g(-x) = g(x)$
(d) Nej, g är inte injektiv, ty $g(x_1) = g(x_2)$ om $f(x_1) = -f(x_2)$

2.2 (a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 2

2.3 $f^{-1}(y) = \ln(1-y^2)$, $D_{f^{-1}} = [0,1[= V_f$, $V_{f^{-1}} = D_f =]-\infty, 0]$.

2.4 (a) $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}\,, \quad 1 \leq y \leq 9$ (b) $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{för } 1 \leq y \leq 4 \\ -\sqrt{y} & \text{för } 9 \leq y \leq 16 \end{cases}$

2.5 $c = 1$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ eller $c = -1$, $a = b = 0$.

2.6 $D_f =]-\infty, -2[\cup[-1, \infty[$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$.

2.7 (a) $\ln 16 = \ln 2^4 = 4\ln 2$ (b) $\ln 18$ (c) $\ln 1 = 0$

2.8 $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 < 2\ln 11 < 3\ln 5 < \ln 7 + 2\ln 6 - \ln 2 < 7\ln 2$

2.9 (a) $\ln x^{-1} = -\ln x$ (b) $\ln \dfrac{27}{4}$

2.10 (Se på $\ln x_2 - \ln x_1$)

2.11 (a) Hur förskjuts ln-funktionens graf? (b) Förenkla, $y = -\ln x$

2.12 (a) $D_f = \,]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$, $V_f = \mathbf{R}$ (b) $D_f = \left[2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}\right]$

2.13 (a) $D_f =]3, \infty[$

(b) Omskrivningen $\sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)} = \sqrt{\ln(1-x) - \ln(3-x)}$ är felaktig, men omskrivningen $\sqrt{\ln\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)} = \sqrt{\ln(x-1) - \ln(x-3)}$ är korrekt. Varför?

2.14 (a) T ex $x = y = 1$ (b) $y = \dfrac{x}{x-1}$ för $x > 1$.

2.15 $\dfrac{a+b}{2}$ $\left(\ln 3 = \dfrac{3b-a}{8},\ \ln 2 = \dfrac{3a-b}{8}\right)$

2.16 (a) $e^x e^y = 4$ (b) $e^x e^x = 2$ (c) 16

2.17 $x = \dfrac{1}{2}(3 - \ln(e^3 - 1))$.

2.19 (a) e^x (b) e^{x+y} (c) $22/3$ (d) $\sqrt{x^2 - 1}$, $x > 1$ (e) $2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$

2.20 $D_f = [0, \ln 2[$, $f^{-1}(t) = \ln(2t^2 + 1) - \ln(t^2 + 1)$.

2.24 (a) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (b) 4

2.25 (a) $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ (b) $x = -\dfrac{3}{2}$ (c) Ingen reell lösning

2.26 $D_f = \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \ln \dfrac{4-3x}{x-1}$.

2.27 (a) $D_f =]-1, 5/2[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{5e^y - 1}{2e^y + 1}$ (b) $D_f =]-\infty, 1[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 2}{e^y - 1}$.

2.28 (a) $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{\dfrac{21}{4} - x}\right)$ (b) Invers saknas ty $g(0) = g(\ln 2) = 5$ (t ex).

2.29 10

2.30 (a) $D_f = [0, 2]$ (b) $D_f =]-\infty, 0]$

2.31 (a) Ja, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^{1/e}$, $x \geq 0$.
(b) Nej, f är inte injektiv, ty t ex är $f(1/4) = f(3/4)$.

2.32 (a) 2^{2x+y} (b) 3^{2x}

2.33 ($y = {}^2\log 1000 \iff 1000 = ?$)

2.34 (a) $f^{-1}(x) = \ln(2 + \sqrt{x+4})$, (b) $D_{f^{-1}} = V_f = [-4, +\infty[$, $V_{f^{-1}} = D_f = [\ln 2, +\infty[$.

2.35 (a) $x = \dfrac{\sqrt{9+4e} - 3}{2}$ (b) $x = \dfrac{\ln 3 + \ln 2}{2\ln 3 - 3\ln 2} = \dfrac{\ln(6)}{\ln(9/8)}$

2.36 (a) $0 < x < e^{-1}$ eller $x > 1$ (b) $x > 0$ med $x \neq 1$

2.37 $x = \dfrac{1}{6}$

2.40 (a) $\exp\left(\dfrac{3}{1+x^2}\right)$ (b) x^3 (c) $\dfrac{1}{1+e^{6x}}$ (d) $\dfrac{1}{1+\ln^2 x}$

(e) $3x$ (f) $-\ln(1+x^2)$ (g) $\exp\left(\dfrac{3}{1+\ln^2 x}\right)$ (h) $\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$

(i) $\dfrac{1}{1+x^6}$ (j) $\dfrac{1}{1+9x^2}$ (k) $\dfrac{3}{1+x^2}$ (l) $-\ln(1+e^{6x})$.

2.41 (a) T.ex. $f(x) = e^x$ och $g(x) = -x^2$
(b) T.ex. $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x^2$ och $h(x) = \cos x$.

2.42 (a) Ja (b) Nej, motexempel $f(x) = g(x) = x$ (c) Ja (d) Ja, nej respektive nej.

2.43 (a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ resp $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ resp $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ resp $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(d) 0 resp -1 (e) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ resp $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (f) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ resp $-\dfrac{1}{2}$

2.44 (a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.45 $(-1)^n$.

2.46 (a) $v = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $v = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$ (b) $v = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ (c) $v \in \mathbf{R}$

2.47 (a) $v = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$ (b) $v = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$

2.48 (a) $-\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{6}$ (b) $-\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}$

2.50 (a) $\tan 0 = \cot\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\tan\dfrac{\pi}{4} = \cot\dfrac{\pi}{4} = 1$

(b) $\tan\dfrac{\pi}{6} = \cot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\dfrac{\pi}{3} = \cot\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

2.51 (a) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ resp $-\sqrt{3}$ (b) Båda -1 (c) Odefinierat resp 0 (d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ resp $\sqrt{3}$

2.52 $u = v + \pi n$ (n heltal) (både (a) och (b)).

2.53 (a) $v = \dfrac{\pi}{6} + \pi n$ (b) $v = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ (c) $v = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n$ (d) $v = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ (n heltal).

2.54 -18

2.55 Diskutera dina figurer med läraren

2.56 $\sqrt{13}$

2.57 $u + v = \dfrac{3\pi}{4}$

2.58 $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$

2.59 (b) $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $-\pi < x < \pi$

2.60 $u + v = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, ($n$ heltal).

2.61 Alla vinklar är $\dfrac{\pi}{3}$ (liksidig triangel).

2.62 1.

2.63 $\begin{array}{lll} z_1 = 1\,e^{i0} & z_2 = 13\,e^{i\pi} & z_3 = 1\,e^{i\pi/2} \\ z_4 = \sqrt{2}\,e^{i3\pi/4} & z_5 = 2\,e^{i2\pi/3} & z_6 = 3\,e^{i4\pi/5} \end{array}$ samtliga med argument modulo 2π.

2.64 (a) $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i2\pi/9}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i8\pi/9}$, $z_3 = \sqrt[3]{2}e^{i14\pi/9}$
(b) $z_k = \sqrt[6]{2}\exp i(\pi/36 + 2k\pi/3)$, $k = 0, 1, 2$.

2.65 $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, n heltal. $(e^{ix} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i)$

2.66 $\operatorname{Re} w = e^{2x}\sin x$, $\quad \operatorname{Im} w = e^{2x}\cos x$

2.67 $A = C_1 + C_2$, $\quad B = i(C_1 - C_2)$

2.69 $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \Rightarrow (1+i)^n = 2^{n/2}\,e^{ni\pi/4} \Rightarrow$
$2^{n/2}$ då $n = 8k$, $\quad 2^{n/2}(1+i)/\sqrt{2} = 2^{(n-1)/2}(1+i)$ då $n = 8k+1$,
$2^{n/2}i$ då $n = 8k+2$, $\quad 2^{n/2}(-1+i)/\sqrt{2} = 2^{(n-1)/2}(i-1)$ då $n = 8k+3$,
$-2^{n/2}$ då $n = 8k+4$, $\quad 2^{n/2}(-1-i)/\sqrt{2} = -2^{(n-1)/2}(1+i)$ då $n = 8k+5$,
$-2^{n/2}i$ då $n = 8k+6$, $\quad 2^{n/2}(1-i)/\sqrt{2} = 2^{(n-1)/2}(1-i)$ då $n = 8k+7$,
$k = 0, 1, 2, \ldots$.

2.70 $a = \dfrac{1+2i}{5}$, $\quad b = \dfrac{2+14i}{25}$,

$$\operatorname{Re}\ (ax+b)\,e^{(1+i)x} = e^x\Big(\Big(\frac{x}{5} + \frac{2}{25}\Big)\cos x - \Big(\frac{2x}{5} + \frac{14}{25}\Big)\sin x\Big),$$

$$\operatorname{Im}\ (ax+b)\,e^{(1+i)x} = e^x\Big(\Big(\frac{2x}{5} + \frac{14}{25}\Big)\cos x + \Big(\frac{x}{5} + \frac{2}{25}\Big)\sin x\Big).$$

2.71 (a) $\arcsin 0 = 0$, $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$ (b) $\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, $\arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$
(c) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$, $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$
(d) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$
(e) $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$ (f) ej definierat

2.72 (a) 0 (b) $\dfrac{\pi}{6}$ (c) $-\dfrac{\pi}{4}$ (d) $-\dfrac{\pi}{3}$.

2.73 $\pi + \arctan 2$.

2.74 (a) $-\dfrac{\pi}{7}$ (b) $\dfrac{3\pi}{5}$ (c) $\dfrac{\pi}{5}$.

2.75 $2R\sin\alpha$.

2.76 (a) injektiv $\Rightarrow$ ej jämn
(b) växande $\Rightarrow$ ej strängt avtagande
(c) strängt växande $\Rightarrow$ ej avtagande, ej strängt avtagande, ej jämn
(d) avtagande $\Rightarrow$ ej strängt växande
(e) strängt avtagande $\Rightarrow$ ej växande, ej strängt växande, ej jämn
(f) monoton är förenlig med alla!
(g) strängt monoton $\Rightarrow$ ej jämn
(h) uppåt begränsad är förenlig med alla!
(i) nedåt begränsad är förenlig med alla!
(j) begränsad är förenlig med alla!
(k) jämn $\Rightarrow$ ej injektiv, ej strängt växande, ej strängt avtagande, ej strängt monoton
(l) udda är förenlig med alla!

2.77 (a) $\sin v = \frac{1}{3}$ $\cos v = \frac{\sqrt{8}}{3}$ $\tan v = \frac{\sqrt{2}}{4}$

(b) $\sin v = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\cos v = \frac{2}{3}$ $\tan v = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(c) $\sin v = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos v = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\tan v = 2$

(d) $\sin v = -\frac{1}{3}$ $\cos v = \frac{\sqrt{8}}{3}$ $\tan v = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

(e) $\sin v = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\cos v = -\frac{2}{3}$ $\tan v = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

(f) $\sin v = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos v = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\tan v = -2.$

2.78 $\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{6}}.$

2.79 (a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $-\frac{\pi}{6} + n\pi$, n heltal (c) T.ex. $0 < \alpha + \beta < \pi$ (d) $\frac{5\pi}{6}$.

2.80 (a) $\sqrt{27} + 13i$, $1 + i\sqrt{48}$, $-\sqrt{3} + i$ (b) $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, n heltal

(c) T.ex. $0 < \alpha + \beta < \pi$ (d) $\frac{5\pi}{6}$.

2.81 (a) π (b) $\pi + \arctan\frac{3}{5}$.

2.82 $f^{-1}(x) = \sqrt{-\ln\left(\frac{\pi}{2} + \arctan x\right)}$.

2.83 (b) $x = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$.

2.84 (a) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ (b) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

2.85 $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $D_{\tanh} = V_{\tanh^{-1}} = \mathbf{R}$, $V_{\tanh} = D_{\tanh^{-1}} =]-1, 1[$.

2.86 $\tanh^{-1}(v) = \tanh^{-1}(v_1) + \tanh^{-1}(v_2)$.

2.87 (a) $(\ )^3, \sqrt{\ }, \ln, \exp, \arccos, \arcsin, \arctan$ är injektiva
(b) $(\ )^3, \sqrt{\ }, \ln, \exp, \arcsin, \arctan$ är strängt växande
(c) $\arccos$ är strängt avtagande
(d) $\cos, \sin, \arccos, \arcsin, \arctan$ är begränsade
(e) $(\ )^2, \sqrt{\ }, |\ |, \exp, \arccos$ är ≥ 0
(f) $(\ )^2, (\ )^3, |\ |, \exp, \cos, \sin, \arctan$ har definitionsmängd $= \mathbf{R}$
(g) $(\ )^3, \ln, \tan$ har värdemängd $= \mathbf{R}$
(h) $(\ )^2, |\ |, \cos$ är jämna
(i) $(\ )^3, \sin, \tan, \arcsin, \arctan$ är udda.

2.88 Funktionerna i $\{(\ )^3, \sqrt{\ }, \ln, \exp, \arccos, \arcsin, \arctan\}$ är alla injektiva, så för dem gäller $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.
För övriga gäller (n står för ett godtyckligt heltal):

$$\begin{aligned}
x^2 = y^2 &\quad\Leftrightarrow\quad x = \pm y \\
|x| = |y| &\quad\Leftrightarrow\quad x = \pm y \\
\cos x = \cos y &\quad\Leftrightarrow\quad x = \pm y + 2\pi n \\
\sin x = \sin y &\quad\Leftrightarrow\quad x = y + 2\pi n \text{ eller } x = \pi - y + 2\pi n \\
\tan x = \tan y &\quad\Leftrightarrow\quad x = y + \pi n
\end{aligned}$$

Gränsvärden och kontinuitet

3.1 Graf, se boken. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

3.2 (a) 0 (b) $\frac{3}{2}$.

3.3 (a) $-\frac{3}{5}$ (b) $-\frac{5}{7}$ (c) $-\frac{1}{2}$.

3.4 (a) 1 (b) 0 (c) 1.

3.5 (b) T.ex. $\omega = 11$ (c) T.ex. $\omega = \frac{1}{\epsilon}$.

3.7 (a) 1 (b) saknas.

3.8 (a) 0 (b) ∞ (c) Existerar ej.

3.9 $\sqrt{e}$.

3.10 (c) nej (d) ja.

3.12 Gränsvärdet är 1.

3.13 (a) 0 (b) 1.

3.14 $-\infty$, ∞ respektive 0.

3.15 (a) 2 (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{7}$ (d) 0.

3.16 (a) $-\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$.

3.17 (a) e (b) e.

3.18 Ja, genom $f(0) = 0$.

3.19 $A = 1$ och $B = \frac{1}{2}$.

3.20 (a) 1 (b) -1 (c) $-\pi/4$.

3.21 $\frac{1}{2}$.

Derivator med tillämpningar

4.2 (a) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$ (b) $11(1-3x^2)(x-x^3)^{10}$
(c) $\frac{4x}{(1-x^2)^2}$ (d) $\frac{1}{x}$
(e) $\frac{1}{x}$ (f) $2x\ln x + x$
(g) $\frac{2}{x^2}e^{-2/x}$ (h) $\frac{2x}{1+x^2}$

4.3 (a) $\frac{2}{1-x^2}$ (b) $\frac{3(\ln x)^2}{x}$
(c) $\frac{1}{x(1+x^2)}$ (d) $\exp(\sqrt{1+\ln x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$
(e) $e^{-1/\sqrt{x}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$ (f) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
(g) $-e^{-x}(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}e^{-x}\sin(x - 3\pi/4)$ (h) $\tan^2 x$
(i) $\frac{1}{\sin x}$ (j) $\frac{2\arctan x}{1+x^2}$
(k) $-\frac{4}{x^2+16}$ (l) $\frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$

4.4 (a) T.ex. $|x-2|$ (b) Finns ingen.

4.5 (a) $1/5$ (b) $-\frac{4}{3}\cos 1$

4.6 $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$ respektive $y = -\frac{2x}{3} + \frac{8}{3}$.

4.7 $2000\pi \approx 6000\ \mathrm{m}^2/\mathrm{h}$.

4.8 $f'_+(0) = 3,\ f'_-(0) = 1$. $f'(0)$ existerar ej.

4.9 (a) Ja (b) Nej.

4.10 $A = 1$ och $B = -1/2$.

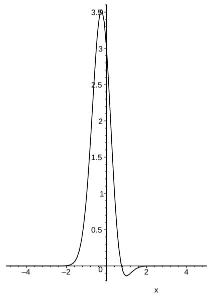
4.12 $(Df^{-1})(2) = 1/2$.

4.13 $\dfrac{7\pi}{54\sin^2 27°} \approx 2{,}0$ cm per minut.

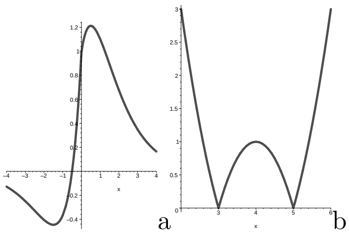
4.14 $f''(x) = 2\ln|x| + 3$ för $x \neq 0$, $f''(0)$ existerar ej.

4.15 (a) $f' = 3x(x-2)$. Strängt avtagande i $[0,2]$.
(b) $f' = -\dfrac{(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$. Strängt avtagande då $x \geq 1/\sqrt{3}$.

4.16 Lok max $f(-1/4) = 4e^{-1/8} > 0$, lok min $f(1) = -e^{-2} < 0$, dessa är även största resp minsta värde.

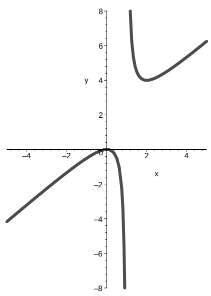


4.17 (a) Lok max $f(1/2) = 2e^{-1/2}$, lok min $f(-3/2) = -2e^{-3/2}$
(b) Lok max $f(4) = 1$, lok min $f(3) = 0$ och $f(5) = 0$.



a b

4.18 (a) $V_f =]-\infty, 0] \cup [4, \infty[$
(c) 2
(d) $k < 0$ eller $k > 4$ ger 2 rötter, $k = 0$ eller $k = 4$ ger en rot, övriga k ger inga rötter.



4.19 $f(1) = -1$ är minst och $f(e^2) = e^2 - 1$ är störst.

4.20 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{A^{3/2}}{6}$ (hur ser tältet ut?)

4.21 $Df^{-1}(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = 1/3$

4.22 Största värdet är $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ (då triangeln är liksidig). Minsta värde saknas.

4.24 (a) För varje $x_1, x_2 \in M$ med $x_1 < x_2$ gäller $f(x_1) > f(x_2)$
(b) Ja (c) Nej. Exempel $f(x) = 1/x$ (d) Ja

4.25 (a) Falskt (b) Falskt.

4.26 (a) $x \leq 0$ (b) $x > 0$, $x \neq 1$ (c) $x \neq 0$.

4.27 750 kr/dygn.

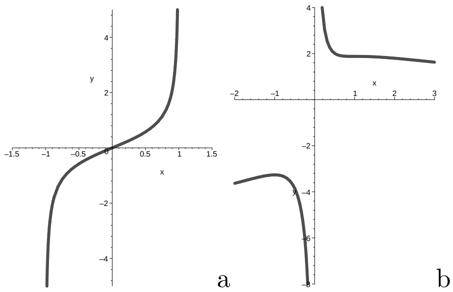
4.29 Ja, f är strängt avtagande

4.30 $f(x) = \arctan x$.

4.31 $|x| \sin x$ är kontinuerligt deriverbar men ej $|x| \cos x$.

4.32 (c) 1 (d) 3.

4.33 (a) Asymptoter $x = \pm 1$, funktionen definierad för $|x| < 1$
(b) Asymptot $x = 0$, $y \to -\infty$ då $x \to \pm\infty$, lok max $f(-1) = -(1 + \pi/2 + \ln 2)$



a b

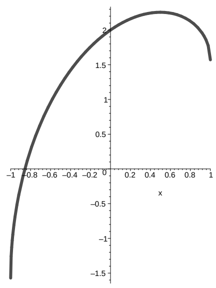
4.36 Alla värden större eller lika med $\dfrac{3(80)^{1/6}}{20}$.

4.37 $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

4.38 (a) 1 (b) 2 (c) 2 (d) 2.

4.39 $[-21, 60]$

4.42 Lok max $f(1/2) = \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}$, $V_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right]$.



4.43 $B \geq 3$.

4.44 Ingen rot om $a > 0$ och $b < a(1 - \ln a)$ eller $a = 0$ och $b \leq 0$.
En rot om $a < 0$ eller $a = 0$ och $b > 0$ eller $a > 0$ och $b = a(1 - \ln a)$.
Två rötter om $a > 0$ och $b > a(1 - \ln a)$.

4.45 För $a \leq 0$ eller $a \geq 1/e$.

4.46 $f'(x) = f(x)(2x + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\tan x}{2} - \dfrac{6}{x \ln x} - 2\cot x)$

4.47 Alla $z = re^{i\phi}$ med $|\phi| \leq \pi/6$

4.48 $D\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$ om $x \neq 1$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ om $x = 1$.

Primitiva funktioner

5.1 (a) $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$ (b) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-2x+C$ (c) $\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$ (d) $-\frac{1}{x+2}+C$
(e) $\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{4}{3}x^{3/2}+C$ (f) $-e^{-x}+C$ (g) $\frac{1}{2}\arctan 2x+C$ (h) $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

5.2 (a) $\frac{1}{12}\left(1+x^2\right)^6+C$ (b) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$ (c) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$ (d) $\ln(2+e^x)+C$

5.3 (a) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$ (b) $f(x)=-\frac{1}{12\left(2+3x^2\right)^2}+1$

5.4 (a) $-(x+1)e^{-x}+C$ (b) $\frac{x}{2}\sin 2x+\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\cos 2x+C$
(c) $\frac{x^2\ln|x|}{2}-\frac{x^2}{4}+C$ (d) $x\left((\ln x)^2-2\ln x+2\right)+C$
(e) $(x-1)e^x+\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$ (f) $x\arctan x-\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2}+C$
(g) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ (h) $\frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{2}+C$
(i) $-\ln|\cos x|+C$

5.5 $\left(-2x^2-3\right)e^{-2x}+C$

5.6 (a) $\frac{x^2e^{x^2}}{2}+C$ (b) $\frac{x^3\sin x^3+\cos x^3}{3}+C$
(c) $\frac{4}{15}(1+\sqrt{x})^{3/2}(3\sqrt{x}-2)+C$ (d) $(2\sqrt{x}-2)e^{\sqrt{x}}+C$

5.8 Vad betyder $\int \cos x\,\sin x\,dx$?

5.9 $f(x)=(2x\sqrt{x}-6x+12\sqrt{x}-12)e^{\sqrt{x}}+4e$

5.10 (a) $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ (b) $\frac{A}{x+4}+\frac{B}{(x+4)^2}$

(c) Detta uttryck är redan partialbråksuppdelat så långt det är möjligt

(d) $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}+\frac{D}{x-3}+\frac{E}{(x-3)^2}$
(e) $\frac{Ax+B}{x^2+x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+5)^2}+\frac{E}{x-4}$

5.11 $\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}$

5.12 Linnéa har förstås rätt, men varför blev det fel i Linus' kalkyl?

5.13 (a) $\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C$ (b) $-x+\frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$
(c) $\frac{x^3}{3}+x^2-4x+11\ln|x+3|+C$ (d) $\ln\left(x^2+4x+13\right)-\frac{7}{3}\arctan\frac{x+2}{3}+C$
(e) $\frac{\ln|x-1|}{2}-\frac{\ln|x+1|}{2}+C$ (f) $\frac{x^2}{2}+x+\frac{\ln|x+1|}{3}+\frac{8\ln|x-2|}{3}+C$

5.14 $f(x)=\ln\frac{1+x}{x-1}+\arctan x-\frac{\pi}{2}\ ,\ x>1$

5.15 (a) $\dfrac{1}{2(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1} + C$

(b) $-\dfrac{1}{4(x-2)} - \dfrac{1}{4(x+2)} + \dfrac{\ln|x-2|}{8} - \dfrac{\ln|x+2|}{8} + C$

(c) $-\dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{\ln|x+1|}{4} - \dfrac{\ln|x-1|}{4} + C$

(d) $\dfrac{\ln|x+1|}{8} + 2\ln|x+2| - \dfrac{17\ln|x+3|}{8} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{4(x+3)^2} + \dfrac{5}{4(x+3)} + C$

(e) $\dfrac{\ln|x|}{5} - \dfrac{\ln\left(x^2+2x+5\right)}{10} - \dfrac{1}{10}\arctan\dfrac{x+1}{2} + C$

(f) $\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{3}} + C$

(g) $\dfrac{x^3}{3} + 2\ln|x-2| + \dfrac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right) - 2\arctan\dfrac{x+1}{2} + C$

(h) $\dfrac{x}{4\left(x^2+2\right)} + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$

(i) $\dfrac{x}{x^2+2x+3} + C$

5.16 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{3}{8}$

5.17 (a) $\dfrac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \ln|x| + C$ (b) $\dfrac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \dfrac{3x}{8\left(x^2+1\right)} + \dfrac{3}{8}\arctan x + C$

5.18 (a) $\ln|x| - \dfrac{1+x^2}{2x^2}\ln\left(1+x^2\right) + C$ (b) $\dfrac{x^2+1}{2\left(x^2+2\right)}\arctan x - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$

5.19 (a) $\arctan e^x + C$

(b) $\ln x - \dfrac{1}{n}\ln\left(1+x^n\right) + C$ om $n \neq 0$, $\dfrac{1}{2}\ln x$ om $n = 0$

(c) $\dfrac{x^2}{4}\left(2(\ln(x))^2 - 2\ln x + 1\right) - \dfrac{2x+1}{4}e^{-2x} + C$

(d) $\dfrac{x^2+1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + C$

5.20 $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \ln(x-1) - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 3\arctan x - \dfrac{3\pi}{2}$

5.21 (a) $-\dfrac{\ln\left(2-\sin^2 x\right)}{2}+C$

(b) $\dfrac{3x}{8}-\dfrac{\sin 2x}{4}+\dfrac{\sin 4x}{32}+C$

(c) $-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+C$ eller $-\dfrac{\cos 5x}{80}+\dfrac{5\cos 3x}{48}-\dfrac{5\cos x}{8}+C$

(d) $\dfrac{1}{2}\ln(1+\sin x)-\dfrac{1}{2}\ln(1-\sin x)+C$ eller $\ln\left|1+\tan\dfrac{x}{2}\right|-\ln\left|1-\tan\dfrac{x}{2}\right|+C$

(e) $2(\sin x-1)e^{\sin x}+C$

(f) $\dfrac{\cos^7 x}{7}-\dfrac{\cos^5 x}{5}+C$ eller $\dfrac{\cos 7x}{448}+\dfrac{\cos 5x}{320}-\dfrac{\cos 3x}{64}-\dfrac{3\cos x}{64}+C$

(g) $2\sin x+\dfrac{1}{4}\ln(1-\sin x)-\dfrac{1}{4}\ln(1+\sin x)+C$

(h) $-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{4}\ln(1-\cos x)-\dfrac{1}{4}\ln(1+\cos)+C$

(i) $\dfrac{3\sin^4 x}{2}-\dfrac{4\sin^6 x}{3}+C$ eller $\dfrac{\cos 6x}{24}-\dfrac{\cos 4x}{16}-\dfrac{\cos 2x}{8}+C$

(j) $\dfrac{\sin x}{3(1+\cos x)^2}+\dfrac{\sin x}{3(1+\cos x)}+C$ eller $\dfrac{1}{6}\tan^3\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}+C$

(k) $-\dfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$

(l) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$

5.22 $f(x)=\dfrac{1}{4\cos^4 x}-\dfrac{1}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{\tan^4 x}{4}$

5.23 (a) $\dfrac{3}{7}\cos 3x\sin 4x-\dfrac{4}{7}\sin 3x\cos 4x+C$ eller $\dfrac{\sin x}{2}-\dfrac{\sin 7x}{14}+C$

(b) $\dfrac{1}{2}(\sin x-\cos x)e^x+C$

(c) $\dfrac{1}{2}\left((x+1)\sin x-x\cos x\right)e^{-x}+C$

5.24 $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\sin bx-\dfrac{b}{a^2+b^2}\cos bx\right)e^{ax}+C$ om $a^2+b^2\neq 0$. Hur blir det om $a=b=0$?

5.25 (a) $4x+3\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}-2\right|+3\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right|-3\ln\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)+C=$
$=4x+3\ln|4\cos x+3\sin x|+D$

(b) $\dfrac{x}{12}(\cos 3x-9\cos x)+\dfrac{1}{36}(27\sin x-\sin 3x)+C$

5.26 $\dfrac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}+C$

5.27 (a) $2\sqrt{x-2} - 2\arctan\sqrt{x-2} + C$

(b) $3\sqrt[3]{x} + \ln\left|\sqrt[3]{x} - 1\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right) - \sqrt{3}\arctan\dfrac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}} + C$

(c) $\arcsin(x-1) + C$

(d) $\sqrt{x^2+x-2} - 3\ln\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}\right) + C$

(e) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$ eller $2\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C$

(f) $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$

(g) $\dfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \dfrac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$

(h) $\sqrt{x^2+2x+2} - \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$

(i) $\dfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin(x-1) + C$

(j) $2(x+1)\sqrt{1+x-x^2} - 3\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$

(k) $-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$

(l) $\ln|x| - \ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right) + C$

5.28 (a) $\dfrac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2+3} + \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2+3}\right) + C$

(b) $\dfrac{1}{2}\sin x\sqrt{\cos 2x} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin x\right) + C$

5.29 $f(x) = \arcsin(x-1) + \left(\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{3} - 1\right)\sqrt{2x-x^2} + \dfrac{1}{3}$ för $0 < x < 2$

5.30 $f(x) = \sqrt{x^2+x} + \dfrac{1}{2}\ln\left(x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right) + \dfrac{\ln 2}{2}$

5.31 (a) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\ln(1+\sin x)}{2} + C$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right)\right| + C$

(c) $-x - 4\sqrt{x+1} - 4\ln\left|\sqrt{x+1} - 1\right| + C$

(d) $\dfrac{3}{2}x^{2/3} - 2x^{1/2} + 6x^{1/6} - 3\ln\left(x^{1/3} + x^{1/6} + 1\right) - 2\sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{2x^{1/6}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

(e) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2}}\right| + C$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C$

5.32 (a) $f(x) = \begin{cases} 1+\cos x & \text{om} \quad -\pi \le x \le 0 \\ 3-\cos x & \text{om} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$ (b) $f(\pi) = 4$

5.33 Om $a,\ b$ och c uppfyller villkoret $a + 2b + 3c = 0$

5.35 $f_{\min}$ saknas, $f_{\max} = f(1) = 1 + \dfrac{4}{e}$

5.36 Ja

5.37 $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

5.38 $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)$ ger $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt[6]{x}} = 0$

5.39 $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x\,\cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

Integraler med tillämpningar

6.1 (a) $\dfrac{e^2-1}{2}$ (b) $\dfrac{27}{10}$ (c) $\ln 2$ (d) $\dfrac{(\ln 3)^2}{2}$ (e) $\dfrac{94\sqrt{2}-56}{15}$ (f) $\dfrac{48\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{15}$
(g) $\dfrac{5^{18}-3^{18}}{36}$ (h) $\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (i) 0 (j) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}$ (k) $\dfrac{\pi}{2}$ (l) $\dfrac{2}{3}$

6.4 (a) $x^2\ln(x+1)$ (b) $-\dfrac{x^4}{x^2+1}$ (c) 0 (d) $\dfrac{2e^{x^2}-e^x}{x}$

6.5 $\ln 2$

6.6 (a) 4 (b) $\dfrac{7}{2}$ (c) 1 (d) $\dfrac{29}{4}$ (e) 125

6.7 (a) $-\dfrac{2}{\pi^2}$ (b) $\dfrac{5e^3-2}{27}$ (c) $2\sqrt{2}\ln 2-4\sqrt{2}+4$ (d) $99\ln 3-34$
(e) $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{8}{\pi^3}$ (f) $3e^5-2e^3+6e^2-7e$ (g) 1 (h) $2\ln\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$
(i) $2\sqrt{3}-\dfrac{2\pi}{3}$ (j) $6\cos 1-3\sin 1$ (k) 0 (l) $\dfrac{1}{4}$

6.8 (a) $\dfrac{1}{3}$ (b) $\dfrac{\pi+3\ln 2}{4}$ (c) $2e+3\ln 3-8$

6.9 (a) $8+\ln 3$ (b) $\dfrac{\ln 5}{4}-\dfrac{\arctan 2}{2}$ (c) $\dfrac{5\ln 2}{2}-\dfrac{3\ln 3}{2}$
(d) $\dfrac{\ln 375}{2}$ (e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\arctan\sqrt{2}-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{9}{8}-\dfrac{\pi}{6\sqrt{2}}$ (f) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{36}-\dfrac{1}{4}$
(g) $\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (h) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(\arctan 3-\arctan 2)$ (i) $\dfrac{\pi}{4}$
(j) $1+2\ln\dfrac{4}{3}$ (k) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (l) $2\arctan e-2\arctan\dfrac{1}{e}$

6.10 (a) $\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{3\ln 2}{5}$ (b) $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{20}{9}+\dfrac{9\ln 5}{2}+\dfrac{13\ln 2}{3}-\dfrac{\arctan 3}{3}$
(c) $\dfrac{5\pi}{16}$ (d) $1-\dfrac{\pi}{4}$
(e) $\dfrac{\pi}{2}$ (f) $\dfrac{5}{36}$
(g) $\dfrac{\pi}{2}-1$ (h) $\dfrac{2\pi}{3}$
(i) $\dfrac{\pi^2}{4}$ (j) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{2}$
(k) $4\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-10+4\sqrt{2}$ (l) $6\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{3}+\arctan\sqrt{2}\right)$
(m) $\sqrt{2}-1-\ln(1+\sqrt{2})$ (n) $\sqrt{2}+3\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
(o) $2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9+4\sqrt{5}}{3+2\sqrt{2}}$

6.12 0

6.13 $230\sqrt{3}\approx 400\ V$

6.14 (a) divergent (b) 1 (c) $4(\ln 2-1)$

6.15 (a) divergent (b) $\ln 2$ (c) divergent (d) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

6.16 $\displaystyle\int_{R/2}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=\frac{\pi}{3}R$

6.17 $1 + \dfrac{3\pi}{8}$

6.18 $\dfrac{1}{3}((\pi^2+4)^{3/2} - 8)$.

6.19 $\dfrac{\pi L}{2} + \displaystyle\int_0^{L/R} (L - R\varphi)\, d\varphi = \dfrac{\pi L}{2} + \dfrac{L^2}{2R}$

6.20 $\pi(3e^2/2 - 27/2 + 24\ln 2)$.

6.21 $\pi\left(2 - \ln 2 - \dfrac{\pi}{4}\right)$

6.24 (a) $t = \dfrac{4}{3}$ (b) $t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $t = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$

6.25 $2\pi \displaystyle\int_{-R}^{R} (2R - x)\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\pi^2 R^2$

6.27 $4/e$

6.28 $N = 10$ räcker

6.30 1.

Maclaurin- och Taylor-utveckling

7.1 $2 + \dfrac{1}{4}(x-4) - \dfrac{1}{64}(x-4)^2 + \dfrac{1}{512}(x-4)^3$.

7.2 (a) $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$ (b) $2x - \dfrac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$ (c) $x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)$

(d) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)$ (e) $1 - \dfrac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^8)$ (f) $-x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$.

7.3 (a) $3 + \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{216} + \mathcal{O}(x^6)$ (b) $\ln 2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{24} - \dfrac{x^4}{64} + \mathcal{O}(x^5)$

(c) $-2x + \dfrac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$.

7.4 (a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) -2 (c) $\dfrac{1}{2}$.

7.5 (a) 0 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{3}$.

7.6 Gränsvärdet existerar och är 1.

7.7 (a) $a = 1$, gränsvärde 0 (b) $b = 1$, gränsvärde $-\dfrac{1}{6}$ (c) $c = -\dfrac{1}{2}$, gränsvärde $\dfrac{7}{12}$.

7.8 $f^{(20)}(0) = 0$, $f^{(21)}(0) = -\dfrac{21!}{10!}$.

7.9 (a) $t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{t^5}{5} + \mathcal{O}(t^6)$ (b) $t = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)$

(c) $t^2 = x^2 - x^3 + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{12} + \mathcal{O}(x^6)$, $t^3 = x^3 - \dfrac{3x^4}{2} + \dfrac{3x^5}{4} + \mathcal{O}(x^6)$,

$t^4 = x^4 - 2x^5 + \mathcal{O}(x^6)$, $t^5 = x^5 + \mathcal{O}(x^6)$, $\mathcal{O}(t^6) = \mathcal{O}(x^6)$

(d) $x - x^2 + \dfrac{5x^3}{6} - \dfrac{5x^4}{6} + \dfrac{109x^5}{120} + \mathcal{O}(x^6)$.

7.10 (a) $p(x) = x - 2x^2$ (b) $p(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{14x^5}{15}$.

7.11 $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$, $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + \mathcal{O}(x^8)$.

7.12 (a) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{10}$ (b) $x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40}$.

7.13 (a) 4 (b) $\dfrac{16}{3}$.

7.14 (a) $-2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (4\xi - 2)(x-1)^3$, där ξ ligger mellan 1 och x
(b) $-5 + 7x - 3x^2 + (4\xi - 2)x^3$, där ξ ligger mellan 0 och x
(c) $-5 + 7x - 3x^2 - 2x^3 + x^4$.

7.15 $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$, där ξ ligger mellan a och x.
$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, där ξ ligger mellan a och b.

7.16 (b) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{e^{\theta x}x^4}{24}$, med $\theta \in [0,1]$ (beroende på x).

(c) $e = e^1 \approx 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{8}{3}$, med fel $\dfrac{1}{24} \le e - \dfrac{8}{3} < \dfrac{1}{6}$, alltså $\dfrac{65}{24} \le e < \dfrac{17}{6} < 3$.

(d) Ordning 10 ger $e \approx 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{10!}$ med fel $< \dfrac{3}{11!} < 10^{-7}$.

7.17 (a) $\cos\dfrac{1}{10} \approx 1$ med fel $\le \dfrac{(\frac{1}{10})^2}{2!} = \dfrac{1}{200} < 10^{-2}$.

(b) $\cos 1 \approx 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{13}{24}$ med fel $\le \dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{720} < 10^{-2}$.

7.18 (a) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{\cos\theta x}{120}x^5$, där $0 \le \theta \le 1$ (beror på x).

(d) $\dfrac{x^5}{120} \le \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) \le \dfrac{x^5}{240}$ då $-\dfrac{\pi}{3} \le x \le 0$.

(f) 0

7.19 $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^8}{24}$.

7.20 (a) $(1+t)^{-1/2} = 1 - \dfrac{t}{2} + \dfrac{3t^2}{8} - \dfrac{5(1+\theta t)^{-7/2}t^3}{16}$, $\theta \in [0,1]$ och beror på t.

(b) $\pi \approx 6\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6 \cdot 2^3} + \dfrac{3}{40 \cdot 2^5}\right) = \dfrac{2009}{640}$, med fel $6 \cdot \dfrac{5}{16}\displaystyle\int_0^{1/2} \dfrac{x^6\,dx}{(1-\theta x^2)^{7/2}}$, $\theta \in [0,1]$ och beror på x.

(c) Felets belopp är mindre än $\dfrac{15}{8} \cdot \dfrac{1}{(1 - 1 \cdot (\frac{1}{2})^2)^{7/2}} \cdot \dfrac{(\frac{1}{2})^7}{7} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7} = \dfrac{5\sqrt{3}}{1512} < 10^{-2}$.

7.21 (a) $p_1(x) = 3x$ (b) 3/4.

7.22 (b) Felet är $\dfrac{3m_0c^2}{8(1-\theta\frac{v^2}{c^2})^{5/2}}\dfrac{v^4}{c^4} \le \dfrac{3m_0c^2}{80000\,(99/100)^{5/2}}$ $(\theta \in [0,1])$.

Approximationen blir bra då $|v|$ är liten i förhållande till c.

7.23 $\sqrt[5]{33} \approx 2 + \dfrac{1}{80} = \dfrac{161}{80}$, med fel $\le \dfrac{4}{25(1+\theta/32)^{9/5}} \cdot \dfrac{1}{2^{10}} < 2^{-10} < 10^{-3}$ $(\theta \in [0,1])$.

7.24 $x - x^3 + \dfrac{5x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)$.

7.25 (a) Lokalt minimum (b) Inget lokalt extremvärde (c) Lokalt maximum.

7.27 Varje bråktal $C \geq \dfrac{\cosh 1}{4!}$ duger, exempelvis $C = \dfrac{1}{12}$.

7.28 $\ln 2 \approx \dfrac{2}{1 \cdot 3^1} + \dfrac{2}{3 \cdot 3^3} + \dfrac{2}{5 \cdot 3^5} + \dfrac{2}{7 \cdot 3^7} + \dfrac{2}{9 \cdot 3^9}$

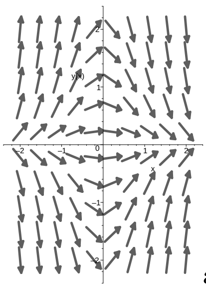
med fel $\dfrac{1}{11}\left(\dfrac{1}{(3+\theta_1)^{11}} + \dfrac{1}{(3-\theta_2)^{11}}\right) \leq \dfrac{1}{11}\left(\dfrac{1}{3^{11}} + \dfrac{1}{2^{11}}\right) < 10^{-4} \quad (0 \leq \theta_{1,2} \leq 1)$.

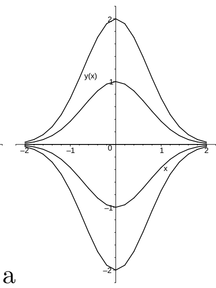
(I själva verket kan man hitta ettθ så att $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, varför?)

7.29 Gränsvärdet existerar och är e.

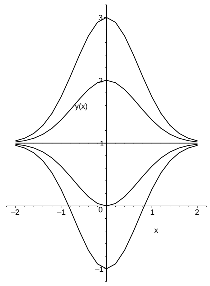
Differentialekvationer

8.2 (b) Integrerande faktor t.ex. $\exp(x^2)$, allmän lösning $y = C\exp(-x^2)$.
(c) $y = \exp(1 - x^2)$.


a

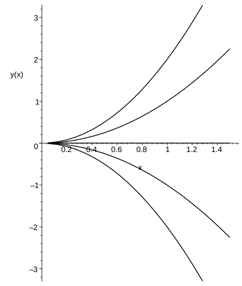

b

8.3 (a) Allmän lösning $y = 1 + C\exp(-x^2)$, lösning genom $(1, 1)$ är $y = 1$.



8.4 (a) $y = Ce^{3x} - 1/27(9x^2 + 6x + 2)$
(b) $y = \dfrac{1}{2} + C\exp(-x^2)$
(c) $y = \dfrac{1}{3} + C\exp(-x^3)$
(d) $y = 1 + \dfrac{C}{1+x^2}$
(e) $y = -\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{\sin x}{x^2} + \dfrac{C}{x^2}$
(f) $y = \dfrac{x^2}{3} + C\sqrt{x}$.

8.5 (a) Integrerande faktor $1/x^2$, allmän lösning är $y = Cx^2$, $x > 0$, C konstant.
(b) $y = -3x^2/4$, $x > 0$.



8.7 $y = (Cx - 1 - \ln x)/(x + 1)$.

8.8 $y = 1 - \dfrac{\arctan x}{x}$, $x \neq 0$. Gränsvärdet är 0.

8.9 (a) $T(40) = 30$ grader. $T(t) = 20 + 40 \exp\left(-t\frac{\ln 2}{20}\right)$, gränsvärdet $\lim_{t\to+\infty} T(t) = 20$ grader.

(b) $T(t) = T_0 + (T(0) - T_0) \exp\left(\frac{t}{t_1} \ln \frac{T_1 - T_0}{T(0) - T_0}\right)$.

8.10 $y(x) = \frac{\sin x - (1/3)\sin^3 x}{\cos x} + \frac{C}{\cos x}$. $C = 0$ ger den udda lösningen.

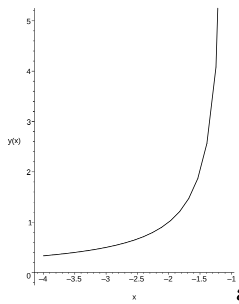
8.11 (a) $y(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln \frac{x^2}{x^2 + 2x + 5} - \arctan \frac{x+1}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$.

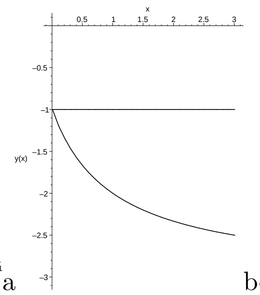
(b) Använd differentialekvationen: Funktionen $\frac{y}{x^2}$ har positiv derivata och gränsvärde 0 då $x \to +\infty$.

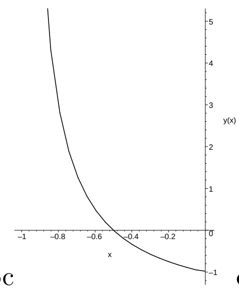
8.12 Den gemensamma punkten är $\left(a + \frac{1}{g(a)}, \frac{h(a)}{g(a)}\right)$.

8.14 (a) $y(x) = -\frac{x+2}{3x+2}$, $x < -\frac{2}{3}$.
(b) $y(x) = -1$.

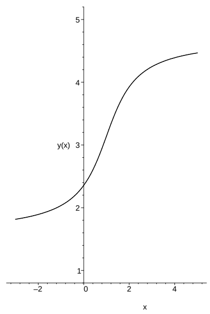
8.15 (a) $y = -\frac{1}{x+1}$, $x < -1$
(b) $y = -1$, $x > 0$
(c) $y = -\frac{3x+1}{x+1}$, $x > 0$
(d) $y = -\frac{2x+1}{x+1}$, $-1 < x < 0$.


a


bc

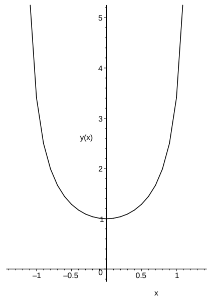

d

8.16 $y(x) = \arctan(x - 1) + \pi$.



8.17 $y = \ln(2e^{-x} + 1)$.

8.18 $y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $|x| < \sqrt{\pi/2}$.



8.19 $y(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{4(1 + x^2)}{1 - 3x^2}$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8.20 $y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + 8x^2}}$.

8.21 Gränsvärdet existerar för $a = \sqrt{3}$ och är lika med $-1/2$.
(Den sökta lösningen är $y(x) = 2\sin(x^2 + \pi/6) - 1$.)

8.22 $y(x) = \left(\dfrac{3 - e^{\arctan x}}{3 + e^{\arctan x}}\right)^2 - 2.$

8.23 (b) $\arctan \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2.$

8.24 $y = \dfrac{x^2}{4}.$

8.25 $y = \tan(x + \dfrac{\pi}{4}) - x,\ -\dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$

8.26 (a) Lösningarna med förgreningspunkt $(0,0)$ är $\sqrt{y} = x$ och $y = 0$. Man får också lösningar $y = 0,\ x \le c,\ \sqrt{y} = x - c,\ x > c\ (c > 0)$, som förgrenar sig i $x = c$.
(b) $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$.

8.27 $y(x) = (1 + x^2)\arctan x$

8.29 Allmän lösning är $y = 1 + \sin(x + C),\ -\dfrac{\pi}{2} - C \le x \le \dfrac{\pi}{2} - C$ samt $y = 0$ och $y = 2$. Den sökta lösningen fås genom skarvning av dessa tre, vilket ger $C = 0$ och skarvpunkterna $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

8.30 $v(t) = \sqrt{\dfrac{a}{b}}\dfrac{1 - Ce^{-2\sqrt{ab}t}}{1 + Ce^{-2\sqrt{ab}t}}$ där $C = \dfrac{1 - v_0\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 + v_0\sqrt{\frac{b}{a}}}$ med gemensamt gränsvärde $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

8.32 (a) $y = Ce^{-3x}$.
(b) $y = Ae^{-x} + Be^{-3x}$, speciellt $A = 1/2,\ B = 1/2$.
(c) $y = (Ax + B)e^{-2x}$, speciellt $A = 0,\ B = 1$.
(d) $y = A + Be^{-4x}$, speciellt $A = B = 1/2$.

8.33 (a) Nej (b) $y = C\sin 2x$.

8.34 (a) $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$, speciellt $A = 1,\ B = -1/2$.
(b) $y = A\cos x\sqrt{2} + B\sin x\sqrt{2}$, speciellt $A = 1,\ B = -\sqrt{2}$.

8.35 $y = y_h + y_p$, där du bestämde den allmänna lösningen y_h till den homogena ekvationen i uppgift 8.34 och där
(a) $y_p = (1/25)(5x - 2) - (x/4)e^{-x}\cos 2x$
(b) (i) $y_p = \sin x - \cos x$ (ii) $y_p = -(x\sqrt{2}/4)\cos x\sqrt{2})$

8.36 $y = -(3/2)e^{-x} + (11/54)e^{-3x} + (1/27)(9x^2 - 24x + 35)$

8.37 $y = 2\cos x\sqrt{2} - (\sqrt{2}/2)\sin x\sqrt{2} + \sin x - \cos x$

8.38 $y = Ae^{-4x} + (B + x/5)e^x - x + 1$

8.39 $y = (A - x/8)e^{-3x} - 1/15$

8.40 (a) $y = (x + 1)e^{-x} - \cos x$
(b) $y = C(x + 1)e^{-x} - \cos x,\ C > 1$.

8.41 $y = Ae^{-x} + B\cos x + C\sin x + x + x(\sin x - \cos x)/4$

8.42 $y = A\sin x + B\cos x + Ce^x + De^{-x}(= A\sin x + B\cos x + C\sinh x + D\cosh x)$.

8.43 $y = Ae^{-x} + e^{x/2}\left(B\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-x/2}\left(D\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + E\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.
(Den karakteristiska ekvationen är $r^6 - 1 = 0,\ r \ne 1$.)

8.44 $y = (1/4)[(x+1)e^{-x} + (x-1)e^{x}]$

8.46 $y = (1/6)(11e^{2x} + e^{3x})$. I det andra fallet finns ingen lösning.

8.47 Ja, lösningen är $y = e^{2x}\left(-\sin 2x + \cos 2x - \dfrac{x^2}{8}\cos 2x + \dfrac{x}{16}\sin 2x\right)$. Hur ser du på enklaste sätt att det är fråga om ett lokalt maximum? Största/minsta värde saknas.

8.48 $y^{(3)} + y'' - y' - y = 4e^{x}$.

8.50 (a) $f(x) = cx$, c konstant (b) $f(x) = e^{cx}$, och $f(x) = 0$, c konstant.

8.52 $y(x) = 0$ för $x \le 1$ och $y(x) = (1/2)(e^{x-1} + e^{1-x}) - 1$ för $x > 1$. $\Delta = 1$, dvs lika med språnget $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) - \lim\limits_{x\to 1-} f(x)$.

8.53 $y(x) = 2\cos x + x^2 - 2$ för $x \le \pi$ och $y(x) = 4\cos x + 2\pi \sin x + \pi^2$ för $x > \pi$. Tredjederivata saknas i $x = 1$.

8.54 $y(x) = \dfrac{x}{2}e^{x-1} + \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{4e}$ för $x \le 1$ och
$y(x) = \dfrac{3e^{x}}{4e^2} + \dfrac{2e^2+1}{4e}e^{-x} - 1$ för $x > 1$. Tredjederivata saknas i $x = 1$.

8.55 $y(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^6)$, alltså skiljer sig koefficienten framför x^4-termen från motsvarande i maclaurinutveckligen av cos.

8.56 Den allmänna lösningen är $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(A\sin x + B\cos x)$, där A, B är konstanter.

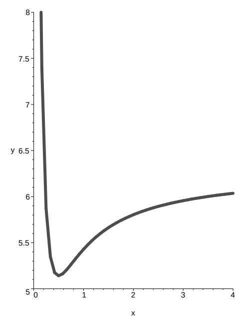
Blandade problem

9.1 (a) $f(x) = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$, där A och B är konstanter (b) $f(x) = \alpha(e^{-2x} - e^{-3x})$
(c) $\alpha = \dfrac{27}{4}$ (d) $\dfrac{9}{8}$ (e) $\dfrac{243\pi}{320}$.

9.2 Lokalt minimum $f(1/2) = \pi + 2$.
Största värde saknas, minsta värde är $\pi + 2$.

$f'(x) = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{(1+4x^2)x^2}$,

$f(x) \to \infty$ då $x \to 0^+$,
$f(x) \to 2\pi$ då $x \to \infty$.



9.3 $(\ln(1+x))^3 = x^3 - \dfrac{3x^4}{2} + \dfrac{7x^5}{4} + \mathcal{O}(x^6)$.

9.4 (a) $\dfrac{\pi^2}{2}$ (b) $2\pi^2$ (c) $\dfrac{\pi^2}{2} + 8\pi$ (d) $6\pi^2$.

9.6 (a) $y = xe^{-x} + \dfrac{3}{4}e^{-2x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}$ (allmän lösning $y = (A+x)e^{-x} + Be^{-2x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}$)
(b) Lokalt minimum.

9.7 $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{e^{\theta x}x^5}{120}$, där θ ligger mellan 0 och 1.

$\sqrt{e} = e^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \dfrac{(\frac{1}{2})^3}{6} + \dfrac{(\frac{1}{2})^4}{24} + \dfrac{e^{\theta/2}(\frac{1}{2})^5}{120}$, där $\theta \in [0,1]$, d.v.s.

$\sqrt{e} \approx \dfrac{211}{128}$ med fel $\dfrac{e^{\theta/2}}{2^5 \cdot 120}$, $\theta \in [0,1]$, så $0 \le$ fel $\le \dfrac{e^{1/2}}{2^5 \cdot 120} < \dfrac{2}{2^5 \cdot 120} = \dfrac{1}{16 \cdot 120} < 10^{-3}$.

9.9 Allmän lösning $y = x\ln x - (x+1)\ln(x+1) + C(x+1)$.
Av dessa uppfyller $y = x\ln x - (x+1)\ln(x+1) + x + 1$ det givna villkoret.

9.10 Endast värdet $\pi/2$ antas, d.v.s. funktionen är konstant.

9.11 (a) $\sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$.

9.12 (a) 4 (b) $-\dfrac{\pi^2}{8}$ (c) $-\dfrac{1}{2}$.

9.13 $\cos(\sin x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$. $\displaystyle\int_0^x \cos(\sin t)\,dt = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \mathcal{O}(x^7)$.

9.14 En.

9.15 (a) $g(x) = -\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ (b) $g(x) = -1$.

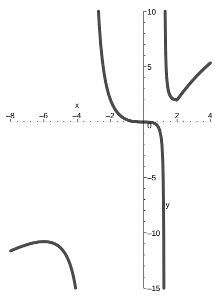
9.17 (a) $\dfrac{1}{4}(\sin x^2 - \cos x^2)e^{x^2} + C$ (b) $\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)^2} - \sqrt{3}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

(c) $\dfrac{1}{4(1+\cos x)} + \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} + C_1 = \dfrac{1}{8}\tan^2\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + C_2$, där $C_2 = C_1 + \dfrac{1}{8}$.

9.18 $p(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$. Felet är $\dfrac{\cos\theta x}{4!}x^4$, där $\theta \in [0,1]$, med belopp högst $\dfrac{(\frac{1}{2})^4}{4!} = \dfrac{1}{384} < 10^{-2}$.

9.19 $y = x\ln x - x + 1$.

9.20 Lokalt max $f(-6) = -54/5$, lokalt min $f(2) = 2$ (spets), (terrass $f(0) = 0$). Största och minsta värden saknas.



$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-4x+12)}{(x^2-2x+4)^2}, & x > 2, \\ \dfrac{x^2(x+6)(x-2)}{(x^2+2x-4)^2}, & x < 2,\ x \neq -1 \pm \sqrt{5}. \end{cases}$$

$f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ och då $x \to (-1 \pm \sqrt{5})^+$,
$f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ och då $x \to (-1 \pm \sqrt{5})^-$.

9.21 $a = 1$. $f'(0) = 1$.

9.22 $a = \pm 1$, $b = -2$. Gränsvärdet blir $-\dfrac{7}{3}$.

9.23 $k < 0$: 1 st; $0 \le k < \dfrac{1}{e}$: 0 st; $k = \dfrac{1}{e}$: 1 st; $k > \dfrac{1}{e}$: 2 st.

9.24 $\dfrac{4}{\pi k^3}(1 - (-1)^k)$.

9.25 $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2x^2}\ln\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)^2} - \dfrac{\sqrt{3}}{x^2}\left(\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

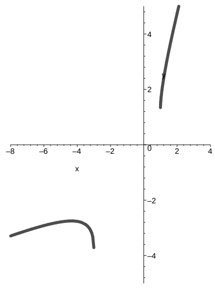
9.26 (a) $-\dfrac{1}{4}$ (b) $\dfrac{1}{10}$.

9.27 (a) $\dfrac{e^{-x}}{10}(\cos 2x - 2\sin 2x - 5) + C$ (b) $\dfrac{2}{5}$.

9.28 $y = 1 - e^{-x} + e^{-2x}(A\cos x + B\sin x - \cos 2x)$.

9.29 $V_f = [0, \infty[$.

9.30 (a) $-\dfrac{1}{10}$ (b) 0 (c) $\dfrac{1}{12}$.



9.31 $D_f =]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$, lokalt max $f(-\frac{13}{3}) = -\frac{11}{4}$.

$f'(x) = \dfrac{5\sqrt{x^2+2x-3}+4x+4}{4\sqrt{x^2+2x-3}}$.
$f(1) = 5/4$, $f(-3) = -15/4$,
$f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$.

9.32 $y = e^x(A + Bx + x^2/12) + e^{-x}/8 + Ce^{-2x}$.

9.33 (a) 0 (b) -1 (c) $e^{8/3}$ (d) $\dfrac{2e}{3}$ (e) 1.

9.34 $\ln 2$.

9.35 $\phi'(e^2-2) = \dfrac{1}{1-e^{-2}}$.

9.36 (a) $-e$ (b) $1-e$ (c) $-\infty$ (d) 0.

9.37 $e - \displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\,dt$.

9.38 $a \le 0$: 0 st; $0 < a \le 1$: 1 st; $1 < a \le e^{1/e}$: 2 st; $a = e^{1/e}$: 1 st; $a > e^{1/e}$: 0 st.

9.40 $y''' + 4y'' + 14y' + 20y = 9e^{-x}$.

9.41 $A = \dfrac{4}{\pi}$. Den blir inte deriverbar i $x = 1$, ty $f'_-(1) = \dfrac{2}{\pi}$, $f'_+(1) = -\dfrac{1}{2}$.

9.42 $a = -1$; gränsvärdet blir -2.

9.43 $C = 0$, $B = \dfrac{1}{8} - A$ och $A > \dfrac{13}{24}$ i lösningen till uppgift 9.32.

9.45 $y = \dfrac{2x}{x+1}(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} + C)$. Med $C = -1$ får man att $\dfrac{y}{x^2} \to 1$ då $x \to 0+$.

9.46 $\dfrac{8-3\sqrt{3}}{4}\,\pi$.

9.47 $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

9.48 Maximum antas vid $x = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + \ln 2}}$.

Teorifrågor