$\boxed{\text{M0039M}}$ - Matematik III - Differentialekvationer komplexa tal och transformteori

Block 1: Komplexa tal

Talområden:

Q - rationella tal

$\sqrt{2}, e, \pi$

C - komplexa talområdet.

ex) $z^2 - 6z + 25 = 0$

$z = 3 \pm \sqrt{9-25}$

$z = 3 \pm \sqrt{-16}$ reella lösningar saknas.

Def: $\boxed{i^2 = -1}$

i = imaginära enheten

Betecknas även med j

$z = 3 \pm \sqrt{i^2 \cdot 16}$

$z = 3 \pm 4i$

$\begin{cases} z_1 = 3 + 4i \\ z_2 = 3 - 4i \end{cases}$ Två komplexa rötter till 2:a grads ekv.

Till n:te grads ekv. finns det n st rötter ev. komplexa.

ex) $x^2+1=0$

$x^2=-1$

$x^2=i^2$

$\underline{x=\pm i}$

Sätt $i^2=-1$

Allmänt komplext tal: $z = x+iy$

$z = a+ib$

imaginärdelen av z.

$\mathrm{Im}(z)=b$

realdelen av z

$\mathrm{Re}(z)=a$

OBS! $\overset{x}{a}$ och $\overset{y}{b}$ är reella tal.

---

ex) $z = 1-2i$ $\qquad \mathrm{Re}(z)=1 \qquad \mathrm{Im}(z)=-2$

$w = -\pi i + 3.14$ $\qquad \mathrm{Re}(w)=3.14 \qquad \mathrm{Im}(w)=-\pi$

$z_1 = 1.87$ $\qquad \mathrm{Re}(z_1)=1.87 \qquad \mathrm{Im}(z_1)=0$

Regler: räkna som vanligt men byt i^2 mot -1

ex) $z = 3+i$

$w = -2+4i$

- $z-w = 3+i-(-2+4i) = 5-3i$
- $z\cdot w = (3+i)(-2+4i) = -6+12i-2i+\underbrace{4i^2}_{-4} =$

$$= \underline{-10+10i}$$

Komplexa konjugatet – byter tecken på imaginärdelen

$z = x + iy$

$\bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy$

beteckning av konjugatet till z.

$w = -1 + 3i \Rightarrow$

$\bar{w} = -1 - 3i$ konjugatet till w.

$w\bar{w} = (-1+3i)(-1-3i) = 1 + 3i - 3i - \underbrace{9i^2}_{9} = 10$

$$\boxed{z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - \underbrace{i^2 y^2}_{-y^2} = x^2 + y^2}$$

Multiplikation av komplext tal med dess konjugat ger ett rent reellt tal.

Division med komplexa tal

förläng med konjugatet till nämnaren

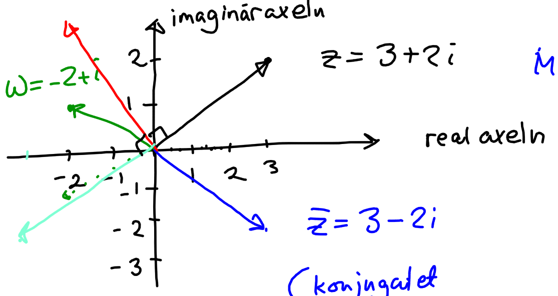
ex) $\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+3i+\overbrace{6i^2}^{-6}}{1+\cancel{2i}-\cancel{2i}-\underbrace{4i^2}_{+4}} =$

$= \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$

reeldel: $-\frac{4}{5}$

imaginärdel: $\frac{7}{5}$

Komplexa talplanet



Markera de komplexa talen $z=x+iy$ med en punkt (x,y) eller en pil (ortsvektor)

$$i\cdot z = i\cdot(3+2i) = 3i+\underbrace{2i^2}_{-2} = -2+3i$$

$$i^2\cdot z = -z = -(3+2i) = -3-2i$$

- - - - - - - - -

Absolutbeloppet till z : $|z|$

$$z = x+iy$$

$$\boxed{|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

OBS! inget i med i beräkn. av beloppet.

OBS! $z\cdot\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$

ex) $z = 3+2i$

$$|z| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}.$$

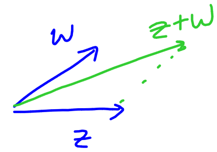
ex) $\left|\frac{2-3i}{1+i}\right|$

$$\frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i-3i+\overbrace{3i^2}^{-3}}{1^2-\underbrace{i^2}_{+1}} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$\left|-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

Alt: $\left|\frac{2-3i}{1+i}\right| = \frac{|2-3i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2^2+(-3)^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
- $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$



Tenta exempel:

Bestäm beloppet av $\omega = \dfrac{1-3i}{i\cdot(3-i)^5}$

$$|\omega| = \frac{|1-3i|}{|i|\cdot|3-i|\cdot|3-i|\cdot|3-i|\cdot|3-i|\cdot|3-i|}$$

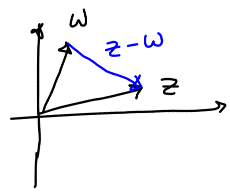
$|i| = 1$

$|1-3i| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

$|3-i| = \sqrt{9+(-1)^2} = \sqrt{10}$

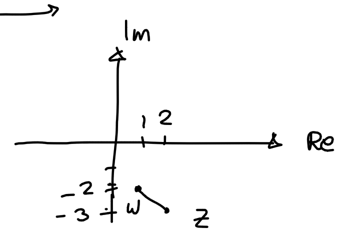
$$\therefore\ |\omega| = \frac{\sqrt{10}}{1\cdot\sqrt{10}^5} = \frac{1}{\sqrt{10}^4} = \frac{1}{10^2} = \underline{\underline{\frac{1}{100}}} = 0.01$$

$|z-\omega| =$ avståndet mellan z och w



$z = 2-3i$

$w = 1-2i$

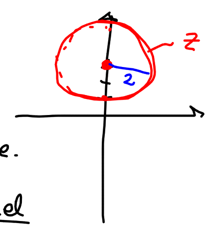


$z-w = 2-3i-(1-2i)$
$= 1-i$

$|z-w| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

- - - - - - - -

ekv. $|z-3i| = 2$



Avståndet mellan z och $3i$ är 2 l.e.

Svar: z är alla komplexa tal i en <u>cirkel</u> med mittpunkt $3i$ och radien 2.

<u>Alt</u>: Sätt $z = x+iy$

$z-3i = x+iy-3i = x+i(y-3)$

VL: $|z-3i| = |x+i(y-3)| = \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 2$ HL

$x^2+(y-3)^2 = 2^2$

cirkel med mittpunkt $(0,3)$ i komplexa talplanet med radien 2.

$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$
sirkel m. mittp. (a,b)
och radie r

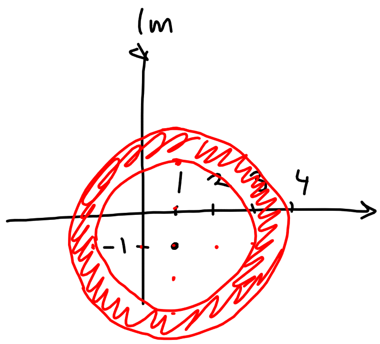
$x^2+y^2 = 1$ enhetscirkeln.

Rita upp i komplexa talplanet.

$2 \leq |z - 1 + i| \leq 3$

$2 \leq |\underbrace{z - (1-i)}| \leq 3$

Avst. mellan z och $1-i$ är mellan 2 och 3 l.e.



Alt sätt $z = x + iy$ ins i

$|x+iy - 1 + i| \Rightarrow$

$2 \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \leq 3$

$2^2 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 3^2$

Bestäm a så att

$$\text{Im}\left(\frac{1+3i}{2-ai}\right) = 0$$

$$\frac{1+3i}{2-ai} = \frac{(1+3i)\cdot(2+ai)}{(2-ai)\cdot(2+ai)} = \frac{2+ai+6i-3a}{2^2+a^2} =$$

$$= \frac{2-3a}{4+a^2} + \underbrace{\frac{(a+6)i}{4+a^2}}$$

Imaginärdelen: $\frac{a+6}{4+a^2} = 0$

$a = -6$

$$i^7 = \underbrace{\underbrace{i \cdot i}_{-1} \cdot \underbrace{i \cdot i}_{-1}}_{1} \cdot \underbrace{i \cdot i}_{-1} \cdot i = -i$$

$$\boxed{i^4 = 1}$$