$\boxed{F10}$ 2:a ordn. inhomogena d.e. $\boxed{\text{Partikulär lösningar}}$

Rep. P. 8.34)

b) $y'' + 2y = 0$

kar.ekv: $r^2 + 2 = 0$

$r^2 = -2 = 2i^2$

$r = \pm\sqrt{2}\, i$

Allm. lösn. $y_h = \underbrace{\cancel{e^{0x}}}_{=1} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{2}x) \right)$

b.v. 1 $y(0) = 1 = C_1 \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} + C_2 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} \iff C_1 = 1$

ins. i allm. lösn.

b.v 2 $y'(0) = -2$. Derivera allm. lösning:

$y_h' = \left(-\sqrt{2} \cdot C_1 \cdot \sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2} \cdot C_2 \cdot \cos(\sqrt{2}x) \right)$

b.v.2 $y'(0) = -2 = -\sqrt{2}\, C_1 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} + \sqrt{2} \cdot C_2 \cdot \underbrace{\cos 0}_{1}$

$C_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

ins. i Allm. lösn.

$\therefore \; y(x) = 1 \cdot \cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2} \cdot \sin(\sqrt{2}x)$

P. 8.14 a) $x^2 \cdot y' = y^2 + 2y + 1$ b.v. $y(-1) = 1$

1:a ordn. Ej linjär ty y^2 förekommer i d.e.
$\Rightarrow$ separabel metod

$g(y) \cdot dy = f(x) \cdot dx$

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = (y^2 + 2y + 1)$$

• separera

$$\frac{dy}{y^2 + 2y + 1} = \frac{dx}{x^2}$$

• integrera

$$\int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\int (y+1)^{-2}\,dy = \int x^{-2}\,dx$$

$$\frac{(y+1)^{-1}}{-1} = \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$\frac{-1}{y+1} = \frac{-1}{x} + C \quad (*)$$

$$\frac{x \cdot (y+1)}{1 - Cx} \quad \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} - C = \frac{(1 - Cx)}{x} \; (y+1) \cdot \frac{x}{1 - Cx}$$

$$\frac{x}{1 - Cx} = y + 1$$

Allm. lösn. $y = -1 + \dfrac{x}{1 - Cx}$

b.v. $y(-1) = 1$ bestämmer C. Ins i $(*)$ ger:

$$\frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{-1} + C \iff C = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \; y(x) = -1 + \frac{x}{1 + \frac{3}{2}x} = \frac{-(1 + \frac{3}{2}x) + x}{1 + \frac{3}{2}x} = \frac{-1 - \frac{1}{2}x}{1 + \frac{3}{2}x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(-2 - x)}{\frac{1}{2}(2 + 3x)} = \frac{-2 - x}{2 + 3x}$$

Inhomogena d.e, med konstanta koeff.

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = \underbrace{f(x)}$$

$\neq 0$ inhomogen

($= 0$ homogen)

HL :
- $f(x) =$ polynom . t.ex $f(x) = 3x^2 - 8$
- exp. funkt. . t.ex $f(x) = 4 \cdot e^{-3x}$
- sin, cos " . t.ex $f(x) = 8 \cdot \sin 4x$
- kombinationer av dessa
  - summor
  - produkter

  } av ovanstående.

---

ex) $y'' + 4y = 12$ Polynom av grad 0.

y_p är en specifik, partikulär lösning

$$\left.\begin{aligned} y_p &= 3 \\ y_p' &= 0 \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ins i d.e.} \qquad 0 + 4 \cdot 3 = 12 \quad \text{ok!}$$

Alla lösningar, allmän lösning :

$$y = y_h + y_p$$

y_p: en partikulär lösning till d.e.

y_h: allmän lösning till motsvarande homogena d.e.

Bevis på OH

här: $y'' + 4y = 12$ ← HL: polynom av grad 0.

- homogen lösn: $y'' + 4y = 0$

kar. ekv: $r^2 + 4 = 0$

$r^2 = -4$

$r = \pm 2i$

$$\underline{y_h = e^{0\cdot x}\left(C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x\right)}$$

- partikulär lösn:

Ansats av samma typ som i HL, men i allmän form.

<u>Ansats</u> $y_p = A$ ← ansats allm. polynom av grad 0.

$$\underbrace{\begin{aligned} y_p' &= 0 \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}}_{\text{insättes i d.e.}}$$

$0 + 4 \cdot A = 12$

$A = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{y_p = 3}$

Allm. lösn: $\underline{y(x)} = y_h + y_p = \underbrace{C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x}_{y_h} \underbrace{+ 3}_{y_p}$

<u>två</u> konstanter till <u>2:a</u> grads d.e, alltid i homogen lösn.

Typproblem:

Typ 1: $y'' - 2y' + y = 3x^2 - 8$ 2:a grads polynom

homogenlösn:

kar. ekv: $r^2 - 2r + 1 = 0$

$r = 1 \pm \sqrt{1-1}$ dubbelrot

$y_h = (C_1 + C_2 \cdot x) e^{1 \cdot x}$ p.g.a dubbelrot.

partikulärlösn:

Ansats: $y_p = Ax^2 + Bx + D$ Allm. polynom av grad 2, samma typ som i HL

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

ins i d.e. ger

$$\underbrace{2A}_{y''} - 2 \cdot \underbrace{(2Ax + B)}_{y'} + \underbrace{(Ax^2 + Bx + D)}_{y} = 3x^2 - 8$$

Identifiera koeff då: VL = HL

$$\left.\begin{aligned} x^2 &: & A &= 3 \\ x &: & -4A + B &= 0 \\ x^0 &: & 2A - 2B + D &= -8 \end{aligned}\right\}$$

$A = 3$

$B = 4A = 12$

$D = -8 - 6 + 24 = 10$

insättes i y_p.

$\therefore$ $y_p = 3x^2 + 12x + 10$

$\therefore$ Allm. lösn: $y(x) = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x) e^x + 3x^2 + 12x + 10$

Typ 2) $y'' + 2y' = 4x$ polynom av grad 1 i HL.

homogenlösn:

kar. ekv: $r^2 + 2r = 0$

$r(r+2) = 0$

$\begin{cases} r = 0 \\ r = -2 \end{cases}$

$y_h = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 \cdot e^{-2x} = C_1 + C_2 \cdot e^{-2x}$

partikulärlösn:

Ansats: $y_p = (Ax + B) \cdot x$

$= Ax^2 + Bx$

(ej i y_h. OK!)

då y_p inte får vara som y_h.

Här y_h inneh. en konstant (C_1)

Då kan y_p inte ha en konstant (B)

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

ins. i d.e:

$2A + 2(2Ax + B) = 4x$

$$\left.\begin{aligned} x:&\quad 4A = 4 \\ x^0:&\quad 2A + 2B = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \end{aligned}$$

$\therefore\ y_p = x^2 - x$

Allm. lösn. $y(x) = y_h + y_p = \underbrace{C_1 + C_2 e^{-2x}}_{y_h} + \underbrace{x^2 - x}_{y_p}$

Typ 3) $y'' - 2y' + y = 4 \cdot e^{2x}$ (Exp funktion i HL

homogenlösn
kar. $r^2 - 2r + 1 = 0$

$r = 1$ dubbelrot

$$\underline{y_h = (C_1 + C_2 x) e^{x}}$$

part. lösn.:

Ansats: $y_p = A \cdot e^{-2x}$ exp. funk av samma typ som i HL.

$$y_p' = -2A \cdot e^{-2x}$$

$$\underbrace{y_p'' = 4A \cdot e^{-2x}}_{\text{ins. i de.}}$$

$$\cancel{e^{-2x}}\Big(\underset{y''}{4A} - 2 \cdot \underset{y'}{(-2A)} + \underset{y}{A} \Big) = 4 \cdot \cancel{e^{-2x}}$$

$$4A + 4A + A = 4$$

$$9A = 4$$

$$A = 4/9 \quad \text{ger}$$

$$\underline{y_p = \frac{4}{9} \cdot e^{-2x}}$$

Allm. lösn: $\underline{y(x)} = y_h + y_p = \underline{(C_1 + C_2 x) e^{x} + \frac{4}{9} \cdot e^{-2x}}$

Typ 4) $y'' - 2y' + y = 2e^x$

homogen lösn. $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$ dubbelrot

$$\underline{y_h = (C_1 + C_2 x)\cdot e^x} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$$

<u>part. lösn</u>:

Ansats: $y_p = A \cdot e^x \cdot x \cdot x$

$= Ax^2 \cdot e^x$

då y_p inte får ha samma ansats som y_h.

$$\boxed{D(f\cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

$$y_p' = 2Axe^x + Ax^2e^x = e^x(2Ax + Ax^2)$$

$$y_p'' = e^x(2Ax + Ax^2) + e^x \cdot (2A + 2Ax) = e^x(Ax^2 + 4Ax + 2A)$$

ins. i d.e.

$$\cancel{e^x}(\underbrace{Ax^2 + 4Ax + 2A}_{y''} - 2\cdot(\underbrace{Ax^2 + 2Ax}_{y'}) + \underbrace{Ax^2}_{y}) = 2\cancel{e^x}$$

$$(\cancel{Ax^2} + \cancel{4Ax} + 2A - \cancel{2Ax^2} - \cancel{4Ax} + \cancel{Ax^2}) = 2$$

$$2A = 2$$

$$\underline{A = 1}$$

$$\therefore \underline{y_p = 1 \cdot x^2 \cdot e^x}$$

Allm. lösn. $y(x) = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$$\underline{= (C_1 + C_2 x + x^2)e^x}$$

Typ 5) $y'' + 2y' = \cos 2x$

(sin/cos i HL)

homogen lösn: $r^2 + 2r = 0$ $r = 0;\ r = -2$

$$y_h = C_1 + C_2 \cdot e^{-2x}$$

Ansats: $y_p = (A \cdot \cos 2x + B \cdot \sin 2x)$

Ansätt alltid både sinus och cosinus i y_p. med samma vinkelfrekvens som i HL av de.