$\boxed{F13}$ Generaliserade integraler forts.
Serier

Generaliserad integral
typ 1 • inte begränsade integrationsgränser, eller
typ 2 • inte begränsad integral i intervallet.

$\infty - \ln 1 = \infty$

typ 1: $$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_1^\infty = \lim_{X\to\infty}\Big[\ln x\Big]_1^X =$$

$$= \lim_{X\to\infty} \ln X - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \infty$$

$\therefore$ integralen saknar gränsvärde, den generaliserade integralen är $\boxed{\text{divergent.}}$

se överst sid 363 och ex. 6.18.

ex) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1$$

har gränsvärde

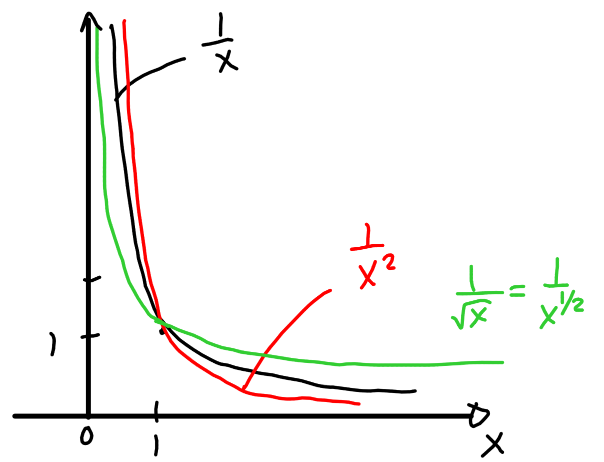
integralen är $\boxed{\text{konvergent}}$

"p-integraler" sats 10.12 c)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{är} \begin{cases} \text{konvergent} & \text{om } p > 1 \\ \text{divergent} & \text{om } p \le 1 \end{cases}$$

Gränserna begränsade men inte integranden i intervallet.

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{är} \begin{cases} \text{konvergent} & \text{om } p < 1 \\ \text{divergent} & \text{om } p \geq 1 \end{cases}$$



ex) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{5/3}}\,dx$ konvergerar ty $p = \frac{5}{3} > 1$

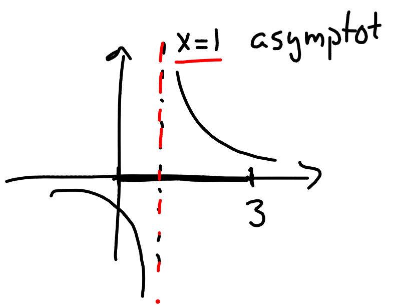
ex) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^{1.1}}\,dx$ divergent ty intervallet är mellan 0 och 1 och $p > 1$.

ex) $I = \int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$

Är generaliserad ty funktionen (Integranden) är inte def. i integrationsområdet.

$\Downarrow$

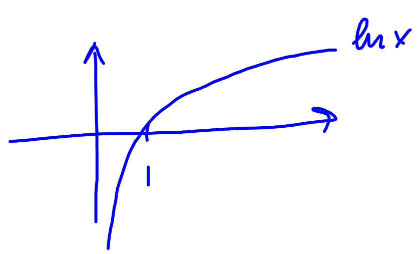
Dela upp i två generaliserade integraler i den punkten.



$$I = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \underbrace{\Big[\ln|x-1|\Big]_0^1}_{(*)} + \Big[\ln|x-1|\Big]_1^3$$

$$\lim_{x\to 1} \ln|x-1| = \left\{ \begin{matrix} t = x-1 \\ \text{då } x \to 1 \Rightarrow \\ t \to 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{t\to 0} \ln|t| = \underline{\underline{-\infty}}$$



$\therefore (*) \Rightarrow -\infty \Rightarrow$ divergent

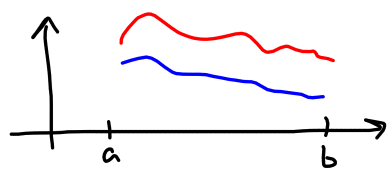
Integralen I är bara konvergent om båda delintegralerna konvergerar. $\Rightarrow$

Om någon av delintegralerna är divergent är I divergent.

Jämförelsekriteriet

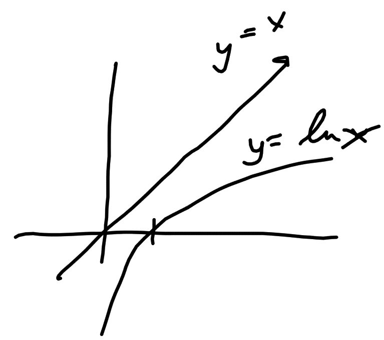
Antag $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för $a < x < b$

- Om $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.
- Om $\int_a^b f(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ divergent.



$0 \leq f(x) \leq g(x)$ på $a < x < b$.

ex) $\int_1^\infty \underbrace{\frac{\ln x}{x^3}}_{f(x)}\,dx$ Är integralen konvergent.



$0 \leq f(x) = \frac{\ln x}{x^3} < \left\{ \begin{array}{l} \text{Hoppas hitta större funktion som konvergerar.} \\ \text{större täljare eller mindre nämnare} \end{array} \right\} < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} = g(x).$

$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent ty p-integral där $p = 2 > 1$.

$\therefore \int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ är konvergent enl. jämförelsekriteriet.

Summor och serier

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ är en potensserie = oändlig summa av polynom.

Serie är en oändlig summa.

Talföljd : $1, 2, 3, 4, \ldots = \{n\}_{n=1}^{\infty}$

$2, 4, 6, 8 \ldots = \{2n\}_{n=1}^{\infty}$

$1, 3, 5, 7, = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$

Fibonacci : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n + a_{n+1} \\ a_0 &= a_1 = 1 \end{aligned}}$$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

ex) $\lim_{n\to\infty} \big(\underbrace{\sqrt{n^2+2n} - n}_{a_n}\big)$

$\{\sqrt{n^2+2n} - n\}_{n=1}^{\infty} = \sqrt{1^2+2\cdot 1} - 1, \sqrt{2^2+2\cdot 2} - 2, \ldots$

$\sqrt{3} - 1, \sqrt{8} - 2, \ldots$

$a_n = \sqrt{n^2+2n} - n = \text{"}\infty - \infty\text{"}$

$= \frac{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{} + n)}{(\sqrt{} + n)} = \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} =$

$= \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1\right)} \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{1+0} + 1} = 1$ då $n \to \infty$

har gränsvärde.

$\Rightarrow$ Talföljden är konvergent.

Serier - oändliga summor.

Harmonisk serie : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

är divergent.

Geometrisk serie : $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{x^k}_{a_k} = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots\dots$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ $\quad \cdot x \quad \cdot x \quad \cdot x$

Geom. serie har konstant kvot. här: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = x$

$$\text{I} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\text{II} \quad x \cdot S_n = \sum_{k=0}^{\infty} x \cdot x^k \quad x + x^2 + \dots x^{n+1}$$

$$\text{I-II}: \quad S_n - x \cdot S_n = 1 - x^{n+1}$$

$$S_n(1-x) = 1 - x^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Geometrisk summa med kvoten x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{om } |x| < 1 \\ \infty & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

Konvergerar serien?

Villkor är att serien är avtagande, termerna går mot noll.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

4 kriterier för att avgöra konvergens.

1. Integralkriteriet.

jfr. serien med motsvarande integral.

ex) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konv. harmonisk serie?

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ är motsvarande integral, som är divergent, ty p-integral med $p=1$.

$\Rightarrow$ Harmonisk serie divergent.

$Re\left[e^{2xi}\right] = \cos 2x + i\sin 2x)$

$= \cos 2x$

P.8.35)

a) $y'' + 2y' + 5y = \underbrace{x}_{\to y_{p1}} + \underbrace{e^{-x}\cdot\sin 2x}_{y_{p2}}$

kar.ek.: $r^2 + 2r + 5 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{1-5}$

$r = -1 \pm 2i$

$y_h = e^{-x}\cdot(c_1\cdot\cos 2x + c_2\cdot\sin 2x)$

$y_{p1} = Ax + B$

p.g.a y_h.

p.g.a. y_h

$y_{p2} = Im\left(e^{-x}\cdot e^{i2x}\cdot x\right] = Im\left[e^{(-1+2i)x}\cdot x\right]$