$\boxed{F14}$ Konvergenskriterier

Ö 7.69 h) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$

Generaliserad då $x \neq 5$.

$$\int_1^5 (5-x)^{-1/2}\,dx = \left[\frac{(5-x)^{1/2}}{-1/2}\right]$$

$$= \left\{ t = \sqrt{5-x} \Leftarrow \begin{array}{l} t^2 = 5-x \\ x = 5-t^2 \\ dx = -2t \cdot dt \end{array} \right\}$$

$x=1 \Rightarrow t = \sqrt{5-1} = 2$

$x=5 \Rightarrow t = 0$

$$= \int_2^0 \frac{-2\cancel{t} \cdot dt}{\cancel{t}} = +\int_0^2 +2\,dt = \left[2t\right]_0^2 = 4$$

7.6.15 b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot(1+x)}$

Ansats Partialbråk

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x)+Bx}{x(1+x)}$$

Identifiera koeff. i tälj.

$$1 = A(1+x) + Bx$$

$x: \quad 0 = A + B \qquad B = -1$

$x^0: \quad 1 = A \qquad A = 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\ln|x| - \ln|1+x|\Big]_1^\infty$$

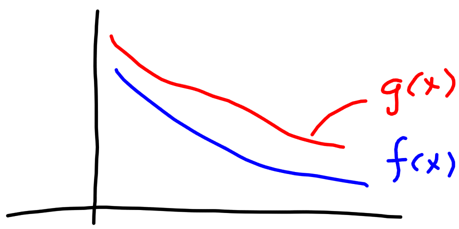
$$= \left[\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]_1^\infty = \left[\ln\left(\frac{\cancel{x}\cdot 1}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)}\right)\right]_1^\infty =$$

$$= \underbrace{\ln\frac{1}{0+1}}_{=0} - \ln\frac{1}{1+1} = -\ln\frac{1}{2} = -\ln 2^{-1} = \underline{\underline{\ln 2}}$$

FN 10.17

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ konv. el div.

$$0 < \underbrace{\frac{1}{1+x^4}}_{f(x)} < \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{större}}\ \underline{\text{funktion}}: \\ \text{större Tälj} \\ \text{mindre nämnare} \end{array} \right\} \le \frac{1}{0+x^4} = \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{g(x)}$$



$\therefore \displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$ är konvergent

ty "p-integral" (s.456)

då $p = 4 > 1$.

Konvergenskriterier till serier

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

Villkor för konvergens är att termerna $a_n \to 0$ då $n \to \infty$.

termernas nollgränsvärde.

Avgöra konvergens med 4 metoder

① Integralkriteriet (IK) (Cauchys integralkriterie)

motsvarande integral

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konv} \\ \text{div} \end{cases} \Leftrightarrow \int f(x)\,dx \begin{cases} \text{konv} \\ \text{div.} \end{cases}$$

ex) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är div ty $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ är divergent.

② Jämförelsekriteriet (JK)

Jfr. serien med annan känd serie:

• Geometrisk serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{om } |x| < 1$$

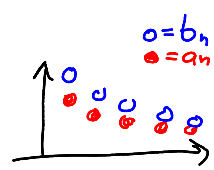
• p-serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots \begin{cases} \text{är konv. om } p > 1 \\ \text{div om } p \le 1 \end{cases}$$

(Bevis: Jfr. med motsvarande "p-integral".)

(se sid 443-444)

$0 < a_n < b_n$



a) $\sum b_n$ konv $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konv

b) $\sum a_n$ div $\Rightarrow$ $\sum b_n$ div ex) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k+7}{k^3+1}}_{=a_k} = \frac{1+7}{1^3+1} + \frac{2+7}{2^3+1} + \frac{3+7}{3^3+1} + \dots$

$= 4 + \frac{9}{9} + \frac{10}{28} + \dots$

$$a_k = \frac{k+7}{k^3+1} = \frac{k\left(1+\frac{7}{k}\right)}{k^3\left(1+\frac{1}{k^3}\right)} = \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\to 0} \frac{\left(1+\overbrace{\tfrac{7}{k}}^{\to 0}\right)}{1+\underbrace{\tfrac{1}{k^3}}_{\to 0}} \to 0$$

då $k \to \infty$.

Termerna avtagande mot noll.

Villkoret om termernas nollgränsvärde är uppfyllt.
(a_k)

<u>Jämförelsekriteriet</u> för att avgöra ev. konvergens.

$0 < a_k = \frac{k+7}{k^3+1} \leq$ { Hitta större serie som konv. Öka täljaren, minska nämn } $< \frac{k+7k}{k^3+0} = \frac{8k}{k^3} = \underbrace{\frac{8}{k^2}}_{=b_k}$

$\sum_1^{\infty} b_k = \sum_1^{\infty} \frac{8}{k^2} = 8 \cdot \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent ty p-serie med $p=2>1$.

$\therefore \sum a_k = \sum_1^{\infty} \frac{k+7}{k^3+1}$ är konvergent enl. jämförelsekriteriet.

ex) $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{1+2^n}}_{a_n} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+2^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{1+2^n} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

∴ villkor om termernas nollgränsv. uppfyllt.

Jämforelsekrit.

$$0 \le a_n = \frac{1}{1+2^n} < \left\{ \begin{matrix} \text{större serie} \\ \text{större T} \\ \text{mindre N} \end{matrix} \right\} < \frac{1}{0+2^n} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{b_n}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

$\cdot \frac{1}{2}$ $\cdot \frac{1}{2}$

konstant kvot ⇒ Geometrisk serie

Konvergent då $|\text{kvoten}| = \frac{1}{2} < 1$

$$\left(= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right)}_{} \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \right)$$

ej nödvändigt.

∴ $\sum a_n$ är konv. enl. Jämforelsekrit.

forts. Konvergenskriterier

③ Kvotkriteriet (KK)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} + \dots$$

• Om $\underbrace{\left| \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}_{\rho} < 1$ är serien konvergent.

$\rho > 1$ är " div.

$\rho = 1$ kan inte konv./div avgöras.

---

ex) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n+5}{3^n}}_{a_n} = \frac{1+5}{1} + \frac{2+5}{3} + \frac{4+5}{9} + \dots$

$= \underbrace{6 + \frac{7}{3} + 1 + \dots}$

termerna avtagande villkor för konv. uppfyllt.

ty: $a_n = \frac{2^n+5}{3^n} = \frac{2^n\left(1+\frac{5}{2^n}\right)}{3^n} =$

$= \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{5}{2^n}\right)}_{\to 0} \to 0$ då $n\to\infty$

$\boxed{2^{n+1} = 2^n \cdot 2}$

Kvotkriteriet:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}} = \frac{(2^n\cdot 2+5)\cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\cdot 3\ (2^n+5)} = \left\{\begin{array}{l}\text{bryt ut}\\ \text{snabbast}\\ \text{växande}\\ \text{term.}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{\cancel{2^n}\left(2+\underbrace{\frac{5}{2^n}}_{\to 0}\right)}{3\cdot\cancel{2^n}\left(1+\underbrace{\frac{5}{2^n}}_{\to 0}\right)} \to \frac{2+0}{3(1+0)} = \frac{2}{3} < 1$$

då $n\to\infty$

∴ serien är konv. enl. kvotkriteriet.

ex) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3^n}{n!}}_{a_n} = \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots$

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$0! = 1$

Kvotkriteriet

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^n \cdot 3 \quad n!}{(n+1)! \cdot 3^n} =$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{n!} = (n+1) \cdot n!$$

$$= \frac{\cancel{3^n} \cdot 3 \cdot \cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{3^n}} = \frac{3}{n+1} \rightarrow \underline{0} < 1 \text{ då } n \to \infty$$

$\therefore$ Serien konvergent enl. kvotkriteriet.