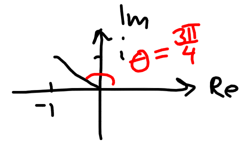
$\boxed{F6}$ Differentialekvationer.

Rep. Tentamensuppg. (aug-13)

Skriv följande på rektangulär form: $z = a+ib$

$$(-1+i)^{-11} = \frac{1}{(-1+i)^{11}}$$

$-1+i = r\cdot e^{i\theta}$ polär form



$$r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore\ -1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$(a^b)^c = a^{c\cdot b}$$

$$\frac{1}{(-1+i)^{11}} = \frac{1}{\sqrt{2}^{11}\cdot e^{i\frac{11\cdot 3\pi}{4}}} = \frac{1}{2^{11/2}\cdot e^{i\frac{33}{4}\pi}}$$

{till följ.}

$$= 2^{-11/2}\cdot e^{-i\left(\frac{32}{4}+\frac{1}{4}\right)\pi} = 2^{-11/2}\cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{4}\right)} =$$

ger 4 hela varv kring komplexa talplanet.

$$= 2^{-\frac{11}{2}}\left(\underbrace{\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)}_{+\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\cdot \underbrace{\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = 2^{-\frac{11}{2}}\left(\frac{1}{2^{1/2}} + i\,\frac{1}{2^{1/2}}\right)$$

$$= 2^{-\frac{11}{2}}\left(2^{-1/2} - i\cdot 2^{-1/2}\right) = 2^{-12/2}(1-i) = 2^{-6}(1-i)$$

$$= \frac{1}{64}(1-i)$$

Alt.

$$\frac{1}{(-1+i)^{11}} = \frac{1}{\underbrace{(-1+i)\cdot(\quad)}_{\underbrace{(-1)^2-2i-1}_{-2i}}\cdot\,\cdot\,(\quad)} =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(-2i)^5}_{=(-2)^5\cdot i^5 = -32i}\cdot(-1+i)} = \frac{1}{-32i\,(-1+i)} = \frac{1}{(32i+32)}\frac{(-32i+32)}{(-32i+32)}$$

$$= \frac{-32i+32}{(32)^2+32^2} = \frac{\cancel{32}(1-i)}{32^{\cancel{2}}(2)} = \frac{1-i}{64}$$

Differentialekvationer D.E diff ekv

ODE = Ordinära diff. ekv.

där en beroende variabel (t.ex y) beror av

<u>en</u> oberoende variabel. (t.ex x, t)

$\cancel{y(x,t,\omega)}$

Diff.ekv är ekvationer med derivator.

- Högsta derivatan anger diff.ekv. <u>gradtal</u>, el <u>ordning</u>.

ex) $y'(x) = y(x)$

$y' = y$

Bestäm $y(x)$

$y(x) = e^x$ är en lösning

$\underline{y(x) = C \cdot e^x}$ är allmän lösning till d.e.

där konstanten C bestäms utifrån

bivillkor:

- begynnelsevillkor: $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$
- randvillkor: $y(a) = 3$, $y(b) = 4$

Bivillkoren ger <u>specifik, partikulär</u> lösning ex) $y'' + y = 0$ 2:a ordn.

$y'' = -y$

Testa: $y = \sin x$

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x = -y$ OK.

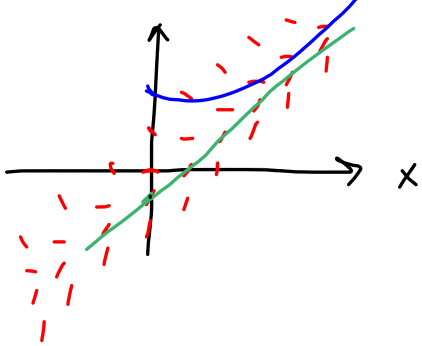
Allm. lösn: $y(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$

1:a ordn. d.e.

Tre lösningsmetoder:

1. Numerisk lösning - Eulers metod
2. Linjära 1:a ordn. d.e — integrerande faktor
3. Separabla d.e. — separabel metod.

Riktningsfält:



b.v. $y(0) = 2$

b.v. $y(0) = -1$

ex) $y' = x - y$

Välj valfria x och y-värden och plotta y' (= lutningen) i punkten.

x	0	1	2	...	1	...	2
y	0	1	2	...	0	..	0
y'	0	0	0				

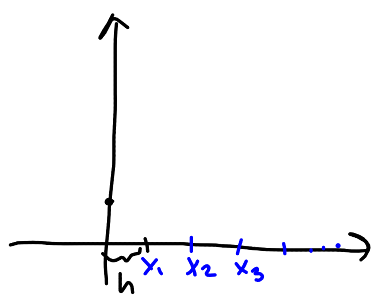
Numerisk lösning med Eulers metod

ger approximativ lösning till 1:a ordn. de

$$y' = f(x,y)$$

ex) $y' = \underbrace{x - y}_{f(x,y)}$ b.v: $y(0) = 1$ begynnelsevärde.

Steglängd: $h = |x_1 - x_0| = |x_{n+1} - x_n|$



x_0

$x_1 = x_0 + h$

$x_2 = x_0 + 2h$

$\vdots$

$x_n = x_0 + n \cdot h$

Härledning:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$h \cdot y' \approx y_1 - y_0$$

$$y_1 \approx y_0 + h \cdot y'$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot y_n'}$$ Eulers metod.

ex) $y' = x - y$

b.v: $y(0) = 1$

steglängd: $h = 0{,}02$

Bestäm $y(0{,}08)$ med Eulers metod

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$ Lös ut y_1

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot y_n'}$$ Eulers metod

Tabell:

	x	y	$y' = x - y$	$h \cdot y'$ ($h = 0{,}02$)
b.v	0	1	-1	$-0{,}02$
+h	0,02	0,98	$-0{,}96$	$-0{,}0192$
+h	0,04	0,9608		
+h	0,06			
	0,08	0,92474		

Svar: $y(0{,}08) \approx 0{,}92$

Eulers metod har fel proportionellt mot h.

$$\text{felet} = \mathcal{O}(h) = c \cdot h$$

ordo

: halverat h ger halverat fel.

Ex) Bestäm $y(2)$ med Eulers metod till BVP (begynnelsevärdesproblemet)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x \cdot y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$ b.v

med steglängd $h = 0{,}2$

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot y_n'}$$

x	y	$y' = x \cdot y$	$h \cdot y' = 0.2 \cdot y'$
1	2	2	0,4
1.2	2,4	2,88	0,576
1.4	2,976		
1.6			
1.8			
2	6,838		

b.v.

Svar: $y(2) \approx 6{,}84$

Ex) $y' = y + x \cdot y$

B.v.: $y(0) = 1$

stegl. $h = 0{,}1$

Eulers metod: $\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot y_n'}$

x	y	$y' = y + x \cdot y$	$h \cdot y' = 0{,}1 \cdot y'$
0	1	1	0,1
0.1	1,1	1,21	0,121
0.2	1,221		
0,3	1,37		

B.v.