$\boxed{F7}$ Diff.ekv. Integrerande faktor
Matematiska modeller.

Rep. Ö 8.6) $y = C\cdot e^{-4x}$ är en lösning.
Till vilken d.e ?

a) $y' = 4x$ direkt integrering av båda sidor.

$y = \int 4x\,dx = 2x^2 + C$ Nej

- - - - -

$$* \begin{cases} y = C\cdot e^{-4x} & \text{ger} \\ y' = C\cdot e^{-4x}\cdot(-4) & \text{ins. i} \end{cases}$$

b) $y' + 4y = 0$

$-4C\cdot e^{-4x} + 4C\cdot e^{-4x} = 0$ OK!

c) $y' - 4y = 0$

Insätt * i de.

$-4C\cdot e^{-4x} - 4\cdot C\cdot e^{-4x} = -8C\cdot e^{-4x} \neq 0$ Nej!

Rep) Numerisk lösning med Eulers metod:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{h} \approx y' \qquad \text{Lös ut } y_1$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot y_n'}$$

ex) $\frac{dy}{dx} = x \cdot y$ steget: $h = 0{,}2$

b.v $y(1) = 2$ Sök: $y(2)$

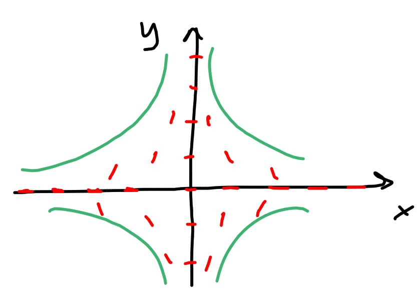
	x	y	$y' = x \cdot y$	$h \cdot y' = 0.2 \cdot y'$
b.v	1	2	2	0,4
+h	1.2	2,4	2,88	0,576
+h	1.4	2,976		
+h	1.6			
	1.8			
	2	6,838		

Exakt lösning: $y(x) = 2 \cdot e^{(x^2-1)/2}$

$y(2) \approx \underline{8{,}963}$

P. 8.2 a) $y' + 2xy = 0$

$y' = -2xy$



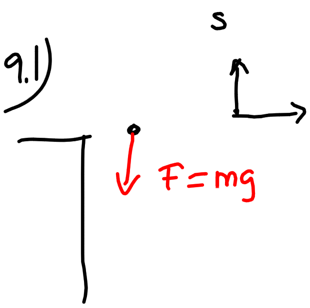
Riktningsfält.

x	0	.....	1	2	-1	1	-1
y	....	0	1	$\frac{1}{2}$	-1	-1	1
$y' = -2xy$	0	0	-2	-2	-2	2	2

Newtons 2:a lag: $\boxed{\sum F = m \cdot a}$

$\sum F$: summan av krafterna
m: massan
a: accelerationen.

ex 9.1)



$$\underbrace{\sum F} = m \cdot a$$

$$-mg = m \cdot a$$

$$a = -g$$

$$a = v'(t) = s''(t)$$

$$s''(t) = -g$$

$$s''(t) = v'(t) = -g$$

$$\underline{v(t)} = \int -g \, dt = \underline{-gt + C}$$

$\underline{\text{b.v}}$: $v(0) = 0$

$$v(0) = -g0 + C = 0 \iff C = 0.$$

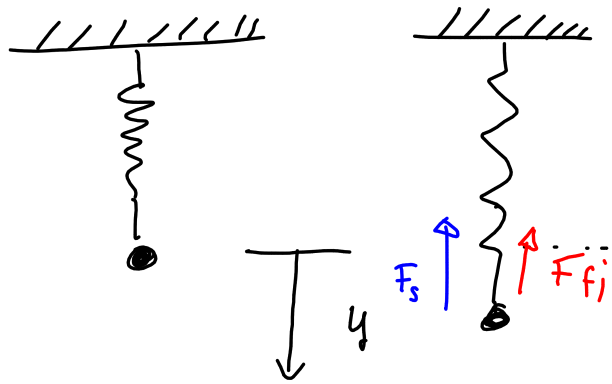
$$s'(t) = v(t) = -gt$$

$$s(t) = \int -gt \, dt = -g\frac{t^2}{2} + D$$

b.v 2: $s(0) = 0$

$$\underline{s(t) = -g\frac{t^2}{2}}$$

Ex 9.3
(s. 380)



$\bar{F}_{fj}$ = fjäder-kraft.
prop. mot y
$F_{fj} = -k \cdot y$

$y(t)$ = läget vid tiden t.

$\bar{F}_s$ = friktionskraft
prop. mot hast.
$\bar{F}_s = -c\,y'$

Newton : $\boxed{\sum F = m \cdot a}$

$-k \cdot y - c\,y' = m \cdot y''$

$\therefore\ \boxed{my'' + cy' + ky = 0}$

b.v : $y(0) = y_0$
b.v2: $y'(0) = 0$

Linjära diff.ekv (sid 380)

$$\boxed{y'' + f(x)\cdot y' + g(x)\cdot y = h(x)}$$

Linjär 2:a ordn d.e.

– " –

ex) $y'' + \sin x \cdot y' + (8x+1)\cdot y = \ln(x)$

ex) $\frac{1}{x} y' = \sqrt{x}\, y$ Linjär?

$\frac{1}{x}\cdot y' - \sqrt{x}\cdot y = 0$ Linjär 1:a ordn. d.e

$y'\cdot \sin(y) = 0$ ej linjär

ty funktion av den beroende var.

produkt => ej linjär

Lösning av 1:a ordn. linjära de

m.h.a "integrerande faktor".

ex) $y' = \sin x$ Direkt integrering

$y = \int \sin x \, dx = -\cos x + C$

ex) $(e^x \cdot y)' = \sin x$

$e^x \cdot y = \int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$y = \frac{-\cos x + C}{e^x}$

VL $(e^x \cdot y)' = e^x \cdot y + e^x \cdot y'$

produkt regeln.

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$e^x \cdot y' + e^x \cdot y = \sin x \iff$

$y' + y = e^{-x} \cdot \sin x$

Vill skriva VL som en derivata av en produkt med y och integrerande faktor

primitiv funktion till $f(x)$

$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{F(x)}\right) = \cancel{\sin x} \cdot h(x)$

integrerande faktor, IF,

$\iff y' \cdot e^{F(x)} + y \cdot e^{F(x)} \cdot \underbrace{F'(x)}_{= f(x)} = \cancel{\sin x} \; h(x)$

$y' + f(x) \cdot y = e^{-F(x)} \cdot \cancel{\sin x} \; h(x)$

Lösningsgång – Linjär 1:a ordn d.e.

Viktigt!

$$\boxed{1\cdot y' + f(x)\, y = h(x)}$$

1) 1:a före y'. Annars dela båda led.

2) Best. integrerande faktor (IF):

$$e^{F(x)} = e^{\int f(x)\,dx}$$

där $f(x)$ är funktionen vid y med tecken.

3) Multiplicera med IF, i båda led.

$$\underbrace{e^{F(x)}\cdot y' + e^{F(x)}\cdot f(x)\cdot y}_{} = e^{F(x)}\cdot h(x)$$

$$= \frac{d}{dx}(y\cdot \mathrm{IF}) = \frac{d}{dx}\left(y\cdot e^{F(x)}\right) = \left(y\cdot e^{F(x)}\right)'$$

VL kan då alltid skrivas som derivatan av produkten mellan y och IF.

4) Integrera båda led:

$$y\cdot e^{F(x)} = \int e^{F(x)}\cdot h(x)\,dx$$

$$y = e^{-F(x)}\cdot \int e^{F(x)} h(x)\,dx$$

ex) $\begin{cases} x^2 \cdot y' + x \cdot y = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ Linjär 1:a ordn.

1) $\boxed{y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x^2}}$ $(*)$

2) IF: $e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$

3) Mult. med IF i $(*)$ ger:

$$\underbrace{x \cdot y' + y}_{} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(y \cdot \underset{IF}{x}) = \frac{1}{x}$$

4) integrera båda sidor

$$y \cdot x = \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$y \cdot x = \ln|x| + C$$

$$y = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{C}{x}$$ Allmän lösning.

b.v: $y(1) = 2 = \frac{\ln 1}{1} + \frac{C}{1} \iff \underline{\underline{C = 2}}$

Svar: $y(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x}$ partikulär lösn.

FN 9.9) $(1+x^2)\cdot y' - 2x\cdot y = (1+x^2)^2\cdot \arctan x$

Linjär 1:a ordn $\Rightarrow$ IF.

- $$\boxed{y' - \frac{2x}{1+x^2}\cdot y = (1+x^2)\cdot \arctan x}$$

- IF: $e^{\int -\frac{2x}{1+x^2}\,dx} = e^{\int -\frac{dt}{t}} =$

$$= e^{-\ln|t|} = e^{\ln t^{-1}} = t^{-1} = (1+x^2)^{-1}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + C$$

Alt: Sätt: $1+x^2 = t$

$dt = 2x\,dx$

- Mult med IF (även i HL.)

$$\underbrace{\frac{1}{1+x^2}\cdot y' - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot y}_{} = \frac{1}{1+x^2}\cdot (1+x^2)\cdot \arctan x.$$

$$\frac{d}{dx}\Big(y\cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{IF}\Big) = \frac{1}{\cancel{1+x^2}}\cdot (\cancel{1+x^2})\cdot \arctan x$$

- integrera: Part. int.

$$y\cdot\frac{1}{1+x^2} = \int \overset{int}{1}\cdot \overset{der}{\arctan x}\,dx =$$

$$= x\cdot \arctan x - \int x\cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2\cdot x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|}$$

$$y\cdot\frac{1}{1+x^2} = x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

$$y(x) = (1+x^2)\left[x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\right]$$

b.v $y(0) = 1$ ger C