$\boxed{F8}$ 1:a ordn. de $\to$ Separabla d.e.

$\to$ Integrerande faktor.

$\to$ Eulers numeriska metod.

Rep. Integrerande faktor

$$x \cdot y'(x) - y(x) = x \cdot \ln x$$

- $1 \cdot y' - \frac{1}{x} \cdot y = \cancel{\frac{x}{x}} \cdot \ln x$

välj $C=0$

- IF: $e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x + C} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

- mult. med IF.

$$\underbrace{\frac{1}{x} \cdot y' - \frac{1}{x^2} \cdot y}_{} = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

iF

- integrera

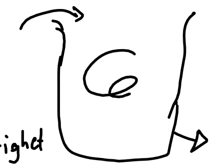
$$y \cdot \frac{1}{x} = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right.$$

dt, t

$$= \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x \cdot (\ln x)^2}{2} + Cx$$

Blandningsproblem



in: 0,5 kg/ℓ med hastighet 7,6 ℓ/min

ut: $\frac{y \text{ kg}}{V \ell}$ med hast. 7.6 ℓ/min.

Volym: 150 ℓ sockerlösning

$y(t) =$ mängd socker (kg) vid tiden t (min).

b.v: $y(0) = 0{,}3 \cdot 150 = 45$ kg

Förändring av sockerhalt: Δy

Förändringshastighet: $\frac{\Delta y}{\Delta t} =$ " in − ut "

$$\left[\frac{kg}{min}\right] = \begin{cases} \text{in: } 0{,}5 \frac{kg}{\ell} \cdot 7{,}6 \frac{\ell}{min} = 3{,}8 \frac{kg}{min} \\ \text{ut: } \frac{y \text{ kg}}{150 \ \ell} \cdot 7{,}6 \frac{\ell}{min} = \frac{3{,}8 \cdot y}{75} \frac{kg}{min} \end{cases}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}$ då $\Delta t \to 0$

$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = 3{,}8 - \frac{3{,}8 \cdot y}{75}$ d.e.

- $\boxed{y' + \frac{3{,}8}{75} y = 3{,}8}$ Linjär 1:a ordn de $\Rightarrow$ IF.
- IF: $e^{\int \frac{3{,}8}{75} dt} = e^{\frac{3{,}8}{75} t}$
- mult. med IF. (Glöm ej HL.)

$$\frac{d}{dt}\left(y \cdot e^{\frac{3{,}8}{75} t}\right) = e^{\frac{3{,}8}{75} \cdot t} \cdot 3{,}8$$

- Integrera: $y \cdot e^{\frac{3{,}8}{75} t} = \int e^{\frac{3{,}8}{75} t} \cdot 3{,}8 \, dt =$

$$= \frac{e^{\frac{3{,}8}{75} t} \cdot \cancel{3{,}8}}{\cancel{3{,}8}/75} + C$$

$$y = \frac{75 \cdot e^{\frac{3{,}8}{75} t} + C}{e^{\frac{3{,}8 \cdot t}{75}}} = \underline{75 + C \cdot e^{-\frac{3{,}8}{75} t}}$$

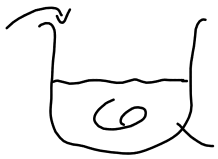
$$y = \frac{75 \cdot e^{\frac{3,8}{75}t} + c}{e^{\frac{3,8 \cdot t}{75}}} = \underline{75 + c \cdot e^{-\frac{3,8}{75}t}}$$

$$\text{b.v:} \quad y(0) = 45 = 75 + c \cdot \underbrace{e^{-\frac{3,8 \cdot 0}{75}}}_{1} \iff c = -30$$

$$\therefore \quad \underline{y(t) = 75 - 30 \cdot e^{-\frac{3,8}{75} \cdot t}}$$

Blandningsproblem 2

in:
2 mg A/ℓ
med hast.
2 ℓ/min



ut:
$\frac{y \text{ mg}}{V\,\ell}$ med
hast: 1 ℓ/min

Volym: max 20 ℓ.
$V(0) = 10\ \ell$

$y(t)$ = mängd förorening A (mg) vid tiden t (min)

b.v: $y(0) = 0$

Volym: $V(t) = 10 + (2-1)t$

$$\left[\frac{mg}{min}\right] \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = \text{"in − ut"} = \underbrace{2\left[\frac{mg}{\ell}\right]\cdot 2\left[\frac{\ell}{min}\right]}_{in} - \underbrace{\frac{y}{10+t}\left[\frac{mg}{\ell}\right]\cdot 1\left[\frac{\ell}{min}\right]}_{ut}$$

$$\therefore \quad y' = 4 - \frac{y}{10+t}$$

$$\boxed{y' + \frac{1}{10+t}\cdot y = 4}$$

1:a ordn. linjär de
⇒ IF.

- IF: $e^{\int \frac{1}{10+t}dt} = e^{\ln|10+t|} = 10+t$ ← välj t.ex.
- mult. m. IF. Glöm ej HL. : $(10+t)\cdot y' + y = 4(10+t)$

$$\frac{d}{dt}\big(y\cdot\underbrace{(10+t)}_{IF}\big) = \underbrace{(10+t)}_{IF}\cdot 4$$

- Integrera:

$$y(10+t) = \int(40+4t)\,dt = 40t + 2t^2 + C$$

$$y = \frac{2t^2 + 40t + C}{10+t}$$ Allmän lösning.

b.v. $y(0) = 0 \iff \frac{C}{10} = 0 \iff C = 0$

Sökt: Behållare fylld efter 10 min. Då finns det ...

$$y(10) = \frac{2\cdot 100 + 40\cdot 10}{10+10} = \frac{600}{20} = \underline{30} \quad [mg]$$

... 30 mg av ämne A.

Separabel metod: (till vissa 1:a ordn. d.e)

ex) $y' - 2x \cdot e^{-y} = 0$

$y' = 2x \cdot e^{-y}$

Ej linjär ty e^{-y} är funktion av y.

Separabel metod:

$$\underbrace{g(y)}_{\text{fkn. av } y} \cdot \frac{dy}{dx} = \underbrace{h(x)}_{\text{fkn. av } x}$$

- separera $g(y) \cdot dy = h(x) \cdot dx$
- integrera $\underbrace{\int g(y)\, dy}_{\text{integrera m.a.p } y} = \underbrace{\int h(x)\, dx}_{\text{integrera m.a.p. } x}$

$$G(y) + C_1 = H(x) + C_2$$

$$G(y) = H(x) + C \qquad \text{där } C = C_2 - C_1$$

Lös ut y, om möjligt

Härledning: $g(y) \cdot \frac{dy}{dx} = h(x)$

$$\underbrace{g(y(x)) \cdot y'(x)}_{\frac{d}{dx} G(y(x))} = h(x)$$

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = h(x)$$

G är primitiv funktion till g.

- integrera $G(y) = \int h(x)\, dx$

$$= H(x) + C$$

Lös ut y ....

ex) $\frac{dy}{dx} - 2x\,e^{-y} = 0$ ej linjär

• prova separera

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cdot e^{-y}$$

• integrera

$$\underbrace{\int \frac{dy}{e^{-y}}}_{\text{funktion av } y} = \int \underbrace{2x}_{\text{funktion av } x}\,dx$$

$$\int e^{y}dy = \int 2x\,dx$$

$$e^{y} = x^2 + C$$

Lös ut y

$$y = \ln|x^2 + C|$$

Allmän lösning

---

ex) $y'\cdot(1+x^2) = 2x\cdot y$

• Separabel (men även linjär)

• integrera

$y \neq 0 \rightarrow$ $\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}\cdot dx$

$$\ln|y| = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + C}$$

$$\ln|y| = \ln|1+x^2| + C$$

$$e^{VL} = e^{HL}$$

$$\boxed{e^{a+b} = e^{a}\cdot e^{b}}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|1+x^2| + C}$$

$$|y| = e^{\ln|1+x^2|}\cdot e^{C} = (1+x^2)\cdot \underbrace{e^{C}}_{>0}$$

Allmän lösn: $y = C_1\cdot(1+x^2)$ $C_1 = \pm e^{C}$

Singulär lösning: $y = 0$ också lösning. Testas med ~~tsätt~~ insättn. i d.e.

ingår i ovanstående om $C_1 = 0$.

Löses även med IF. Pröva själv.

Ex) Newtons avsvalningslag:

$T(t)$ = innertemperaturen (°C) vid tiden t (timmar)

b.v.1 : $T(0) = 20°$ $\qquad T_y$ = Yttertemp : $-10°$ (konstant)

b.v.2 : $T(2) = 15°$

Sökt: $T(24)$

Temperatursänkning per tidsenhet är proportionell mot differensen mellan inner- och ytter temperatur.

$$\frac{dT}{dt} = -k\cdot(T - T_y)$$

$$T' = -k\,(T-(-10))$$

$T' = \frac{dT}{dt}$ $\qquad \boxed{T' = -k\,(T+10)}$ $\qquad$ Separabel.

$$\frac{dT}{T+10} = -k\cdot dt$$

$$\int \frac{dT}{T+10} = \int -k\,dt$$

$$\ln|T+10| = (-kt + C)$$

$$e \qquad\qquad e$$

$$(T+10) = e^{-kt}\cdot e^{C}$$

$$T+10 = C_1\cdot e^{-kt}$$

$$\underline{T = -10 + C_1\cdot e^{-kt}}$$ Allm. lösn.

b.v. 1: $T(0) = 20 = -10 + C_1\cdot e^{-0} \Leftrightarrow \underline{C_1 = 30}$

forts. $\therefore T(t) = -10 + 30\, e^{-k\cdot t}$

b.v. 2: $T(2) = 15 = -10 + 30 \cdot e^{-k2}$

$$25 = 30 \cdot e^{-2k}$$

$$\frac{25}{30} = e^{-2k}$$

$$\ln\left(\frac{25}{30}\right) = -2k$$

$$k = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{25}{30}\right)$$

$$\therefore T(t) = -10 + 30 \cdot e^{-\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{30}\right)\cdot t} =$$

$$= -10 + 30\, e^{\ln\sqrt{\frac{25}{30}}\cdot t}$$

$$= -10 + 30 \cdot \left(\frac{25}{30}\right)^{\frac{1}{2}\cdot t}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln a = \ln a^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{a}}$$

Svar: $T(24) = -10 + 30 \cdot \left(\frac{25}{30}\right)^{\frac{24}{2}} \approx -6{,}6^\circ\ C$

Alt. lösning: $T'(t) = -k\,(T - T_y)$

$$T' + kT = k \cdot T_y$$

$$\boxed{T' + k\cdot T = -10k}$$

Linjär