$\boxed{F9}$ 2:a ordn. de med konstanta koefficienter.

P. 8.15 b) $y' = \dfrac{1+y}{x^2+x}$

$y' = \dfrac{1}{x^2+x} + \dfrac{y}{x^2+x}$

$y' - \dfrac{1}{x^2+x}\cdot y = \dfrac{1}{x^2+x}$

separabel

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+y)}{(x^2+x)}$

$y \neq -1$

$\int \dfrac{dy}{1+y} = \int \dfrac{dx}{\underbrace{x^2+x}_{(*)}} =$

(*) $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$ ← Ansats partialbråk

Liknämnigt ger täljare: $1 = A(x+1) + Bx$

$x: \ 0 = A + B$ $B = -1$

$x^0: \ 1 = A$ $\Rightarrow A = 1$

$\ln|1+y| = \int \dfrac{1}{x} + \dfrac{-1}{x+1}\, dx$

$= \ln|x| - \ln|x+1| + C$

$= \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + C$

$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$|1+y| = e^{\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C}$

$= \cancel{e}^{\cancel{\ln}\, \frac{x}{x+1}} \cdot e^{C}$

$1+y = \dfrac{x}{x+1}\cdot C_1$ (där $C_1 = \pm e^{C}$)

$\underline{y = C_1 \cdot \dfrac{x}{x+1} - 1}$

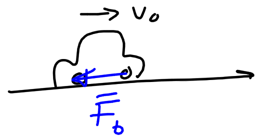
($y = -1$ är en singulär lösning. ingår, då $C_1 = 0$)

b.v. $y(1) = -1$

$\therefore -1 = C_1 \cdot \dfrac{1}{2} - 1 \iff C_1 = 0$

ger lösningen $\underline{y(x) = -1}$

FN. 9.14)



Retardation : $-a$ prop mot hast.

$$\therefore \quad -a = k \cdot v$$

där $a = v'$

$$-v' = k \cdot v$$

$$\frac{dv}{dt} = -k \cdot v \qquad \text{• separera}$$

$$\frac{dv}{v} = -k \cdot dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -k \cdot dt \qquad \text{• integrera}$$

$$e^{\ln|v|} = e^{-kt + C}$$

$$|v| = e^{-kt} \cdot e^{C}$$

$$\underline{v = C_1 \cdot e^{-kt}}$$

b.v. $v(0) = v_0$

$$v = C_1 \cdot \underbrace{e^{-0}}_{1} = v_0 \iff C_1 = v_0$$

$$\underline{v(t) = v_0 \cdot e^{-kt}}$$

Sök t då $v(t) = 0$ ger $t \to \infty$

sträcka : $s(t) = \int v(t)\, dt$

$$= \int v_0 \cdot e^{-kt}\, dt = \frac{v_0 \cdot e^{-kt}}{-k} + C$$

b.v.2: $s(0) = 0$ ger $0 = \frac{v_0 \cdot e^{-0}}{-k} + C \iff C = \frac{v_0}{k}$

$$s(t) = \frac{v_0}{k} - \frac{v_0 \cdot e^{-kt}}{k} = \underline{\frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

då $t \to \infty$: $\lim_{t \to \infty} s(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{v_0}{k}\left(1 - \underbrace{e^{-kt}}_{\to 0}\right) = \frac{v_0}{k}$

Ex) Temp rödvin.

$T(t)$ = vinets temp (°C) vid tiden t (min).

b.v. $T(0) = 10°$

bv.1: $T(10) = 15°$

sök tid då temp är 18°.

- - - - -

Temp förändring per tidsenhet är proportionell mot differensen mellan omgivningens och vinets temp

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (23 - T)$$

prop. konstant.

Löses med separabel metod el. integrerande faktor.

$$T' + k \cdot T = k \cdot 23$$

linjär d.e

- IF: $e^{\int k\,dt} = e^{kt}$
- mult. med IF

$$\frac{d}{dt}\left(T \cdot e^{kt}\right) = e^{kt} \cdot k \cdot 23$$

$$T \cdot e^{kt} = \int e^{kt}\, k \cdot 23\, dt =$$

$$= \frac{23\cancel{k} \cdot e^{kt}}{\cancel{k}} + C$$

Allmän lösn: $T(t) = \frac{23 \cdot e^{kt} + C}{e^{kt}} = 23 + C \cdot e^{-kt}$

b.v 1 $T(0) = 10 = 23 + C \cdot e^{0} \iff C = -13$

b.v 2 $T(10) = 15 = 23 - 13 \cdot e^{-k \cdot 10}$

$$-8 = -13 \cdot e^{-k10}$$

$$\frac{8}{13} = e^{-10 \cdot k}$$

$$\ln \frac{8}{13} = -10 \cdot k \iff k = \frac{-1}{10} \ln \frac{8}{13}$$

$$\therefore T(t) = 23 - 13 \cdot e^{-\left(-\frac{1}{10} \ln \frac{8}{13}\right) t} = 23 - 13 e^{\ln \frac{8}{13} \cdot \frac{t}{10}}$$

$$= 23 - 13 \cdot \left(\frac{8}{13}\right)^{\frac{t}{10}}$$

$$T(t) = \underbrace{23 - 13 \cdot \left(\frac{8}{13}\right)^{\frac{t}{10}}}$$

Søk: t_2 då $T(t_2) = 18 = 23 - 13 \cdot \left(\frac{8}{13}\right)^{\frac{t_2}{10}}$

$$-5 = -13 \cdot \left(\frac{8}{13}\right)^{t_2/10}$$

$$\frac{5}{13} = \left(\frac{8}{13}\right)^{t_2/10}$$

$$\ln \frac{5}{13} = \ln \left[\left(\frac{8}{13}\right)^{t_2/10}\right]$$

$$\boxed{\ln(a^p) = p \cdot \ln a}$$

$$\ln \frac{5}{13} = \frac{t_2}{10} \cdot \ln \frac{8}{13}$$

$$10 \cdot \frac{\ln 5/13}{\ln 8/13} = t_2 \approx 20 \text{ min}$$

2:a ordn. de med konstanta koefficienter

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = h(x)$$

konstanta koefficienter

om $h(x) = 0 \Rightarrow$ homogen d.e.

$h(x) \neq 0 \Rightarrow$ inhomogen d.e.

Homogena d.e av 2:a ordn. med konst. koeff.

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad\qquad y' = y$$

$$y' - y = 0$$

Antag: $y(x) = C \cdot e^{rx}$

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= C \cdot r \cdot e^{rx} \\ y''(x) &= C \cdot r^2 \cdot e^{rx} \end{aligned}\right\} \text{ins i d.e}$$

$$e^{rx} \cdot (Cr^2 + Cr \cdot a + Cb) = 0$$

$$\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{C}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(r^2 + ar + b)}_{\text{karakteristiskt polynom.}} = 0$$

Lös karakteristiska ekv: $\boxed{r^2 + ar + b = 0}$

- Om $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ (Två olika reella rötter) $\begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases}$

$$\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}}$$

- Om $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$ (Reell dubbelrot):

$$\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{rx} + C_2 \cdot x \cdot e^{rx}} = \boxed{(C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{rx}}$$

- Om $r = \alpha \pm i\beta$ (Komplexa rötter, varandras konjugat)

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x)}$$

Re im im

OBS! inga i med i lösningen.

Ex 1) $y'' + y' - 2y = 0$ Homogen d.e.

Sätt: $y = C \cdot e^{rx}$ ger

karakter. ekv: $r^2 + r - 2 = 0$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 4}{4}}$$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \; \underline{y(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-2x}}$$

Ex 2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Sätt: $y_h = C \cdot e^{rx}$ ger

kar. ekv: $r^2 + 4r + 4 = 0$

$$r = -2 \pm \sqrt{4-4}$$

$$r_1 = r_2 = -2$$ dubbelrot.

$$\underline{y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-2x}} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}$$

Ex 3) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Sätt: $y_h = C \cdot e^{rx}$ ger

kar. ekv: $r^2 + 2r + 5 = 0$

$$r = -1 \pm \sqrt{1-5}$$

$$r = -1 \pm \sqrt{-4}$$

$$\boxed{-1 = i^2}$$

$$r = \underbrace{-1}_{Re} \pm 2i$$

komplexa lösningar.

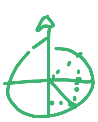
Svar. $\underline{y_h = e^{-1 \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x)}$

Härledning:

$$r_1 = -1 + 2i$$
$$r_2 = -1 - 2i$$

$$y_h = C_3 \cdot e^{(-1+2i)x} + C_4 \cdot e^{(-1-2i)x}$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta}$$



$$y_h = C_3 \cdot e^{-x} \cdot e^{2ix} + C_4 \cdot e^{-x} \cdot e^{-2ix} =$$

$$= e^{-x} \cdot \left(C_3 \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) + C_4\left(\underbrace{\cos(-2x)}_{= \cos 2x} + i \underbrace{\sin(-2x)}_{- \sin(2x)}\right)\right)$$

$$= e^{-x}\left(\underbrace{(C_3 + C_4)}_{= C_1} \cdot \cos 2x + \underbrace{i(C_3 - C_4)}_{= C_2} \cdot \sin 2x\right)$$

FN. 9.20 d) $y'' + 6y' + 25y = 0$ Lös d.e.

Sätt: $y_h = C \cdot e^{rx}$ ger

kar. ekv: $r^2 + 6r + 25 = 0$

$r = -3 \pm \sqrt{9 - 25}$

$r = -3 \pm \sqrt{16 i^2}$

$\underline{r = -3 \pm 4i}$

$\underline{y_h = e^{-3 \cdot x} (C_1 \cdot \cos 4x + C_2 \cdot \sin 4x)}$