33. (i): $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t, 3t^2, 2t) = t(2, 3t, 2)$. Använd $\frac{1}{t}\dot{\mathbf{r}}(t)$ som tangentvektor.

(ii): Om θ är vinkeln mellan en vektor $\mathbf{v}$ längs linjen och en normalvektor $\mathbf{n}$ till planet, så är $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = |\mathbf{v}||\mathbf{n}|\cos\theta$. Vinkeln mellan linjen och planet är då $\pi/2 - \theta$.

KAPITEL 9.

1b) $\int \ln|x|\,dx \overset{!}{=} \int 1\cdot\ln|x|\,dx = \{PI\} = x\ln|x| - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$.

c) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{(x+2)dx}{(x-1)(x+3)}$. Partialbråksuppdela integranden!

e) $y'/y = (\ln|y|)'$, f) $yy' = (y^2)'/2$, g) $xy' + y = (xy)'$

2. Derivera med avseende på x och eliminera konstanten (konstanterna).

3. Derivera med avseende på x och eliminera konstanten.

4. Sätt $r = r(t)$ = radien, t = tiden, $V = 4\pi r^3/3$ = volymen, $A = 4\pi r^2$ = arean. Då är $\frac{dV}{dt} = -kA$, $\frac{d}{dt}(4\pi r^3/3) = -k\cdot 4\pi r^2$, $\frac{dr}{dt} = -k$. $r(0) = r_0$.

5f) $\int \frac{4\ln x}{x}\,dx$ beräknas med substitutionen $t = \ln x$

g) $\int 2x^2 e^{x^2}\,dx = \int x\cdot 2xe^{x^2}\,dx = \{PI\} = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,dx$

h) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x|$. $\int \frac{1+\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \{t = \tan x\}$..

6c) $\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx = \int e^{\sin x}\, 2\sin x\cos x\,dx = \{t = \sin x\} = \ldots$

d) $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2}{(x-1)(x+1)}\,dx = \{HP\} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ldots$

e) $\int e^{-kx} g(x)\,dx + C = \int_1^x e^{-kt} g(t)\,dt + C$

f) $\int x^{-1} e^x\,dx + C = \int_1^x t^{-1} e^t\,dt + C$

7. $f'(x) + (1 + \frac{1}{x})f(x) \leq xe^{-x}$. IF $= xe^x$. Multiplicera med xe^x och $\int_0^x$

8. Om y har ett extremvärde (max eller min) för $x = 0$, så är $y' = 0$ för $x = 0$. Då är $y = 2$ för $x = 0$ enligt differentialekvationen.

9a) Derivera ekvationen och använd $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{t+1}\,dt = \frac{f(x)}{x+1}$. Lös sedan diffekvationen för $f(x)$ och observera bivillkoret $f(0) = 1/4$.

b) I integralen $\int_0^1 f(xt)\tan xt\,dt$ göres substitutionen $s = xt$, x fixt. Derivera sedan med avseende på x och fortsätt som i 9a.

c) Multiplicera ekvationen med e^x. Derivera sedan med avseende på x och använd $\frac{d}{dx}\int_x^1 h(y)\,dy = -h(x)$. Se MatAn1 sid 6:07.

d) Ekvationen visar, att $f'(x)$ är ett polynom av graden ≤ 1.

10. Sätt $u(t)$ = kroppens temperatur vid tiden t (min). Då gäller att avsvalningshastigheten $= -\frac{du}{dt} = k(u-20)$, $u(0) = 60$, $u(20) = 40$.

11. Sätt $v = v(t)$ = farten, t = tiden, m = massan. Newtons kraftlag ger $m\frac{dv}{dt} = -kv$. Begynnelsevillkor: $v(0) = v_0$. $\frac{ds}{dt} = v$, där s = sträckan.

12. $\int v(t)\, e^{Rt/L}\,dt + A = \int_0^t v(s)\, e^{Rs/L}\,ds + A$. Konstanten A bestäms av begynnelsevillkoret $i(0) = 0$.

13. Sätt $m = m(t)$ = jästmängden, t = tiden (tim). Då är $\frac{dm}{dt} = km$, där k är en konstant, $m(0) = m_0$, $m(3) = 2m_0$.

14. $m = m(t)$ = saltvikt i kg vid tiden t (min). Då är $\frac{dm}{dt} = \frac{-20m}{1000}$, $m(0) = 10$.

15. Sjöns volym är $6\cdot 10^6$ (m^3). Sätt $m(t)$ = mängden föroreningar vid tiden t (år). Då är $m(0) = 6\cdot 10^6\cdot 0.05\cdot 10^{-2} = 3000$. Differentialekvationen för $m(t)$ är $\frac{dm}{dt} = 2\cdot 10^6\cdot 0.01\cdot 10^{-2} - \frac{m}{6\cdot 10^6}\cdot 2\cdot 10^6$, $\frac{dm}{dt} = 200 - \frac{m}{3}$.

17. Sätt $v = v(t)$ = hastigheten vid tiden t, m = kroppens massa och $\bar{m}$ = den "reducerade massan" = kroppens massa minus den undanträngda vätskans massa (Arkimedes princip!). Enligt Newtons kraftlag är då $\bar{m}g - kv = m\frac{dv}{dt}$. g är tyngdkraftens acceleration och k en konstant.

18k) $\int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \ln|\sin y|$, l) $\int \frac{dy}{e^{-y}-1} = \int \frac{e^y}{1-e^y}\,dy = -\ln|1-e^y|$.

19b) $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$, c) $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$

22. Integration ger $\arctan x + \arctan y = C$. Bilda sedan $\tan$ för båda leden och förenkla. Fallen $C = \pm\pi/2$ behandlas separat.