LULEÅ
TEKNISKA
UNIVERSITET

OBSERVERA: DENNA TENTAMEN GÄLLER STUDENTER PÅ HÖGSKOLEINGENJÖRSPROGRAM

Tentamen i Matematik II–Integralkalkyl och linjär algebra

Kurskod	**M0043M**

Tentamensdatum	2014-06-05
Skrivtid	09.00 – 14.00

Totala antalet uppgifter: 6

Betygsgränser: U:0–13, **3**:14–19, **4**:20–25, **5**:26–30.
Resultatet meddelas via Mitt LTU.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare.

Till alla uppgifter ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, införda beteckningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt presenterade att de blir svåra att följa. Även endast delvis lösta problem kan ge poäng.

Institutionen för teknikvetenskap och matematik

Uppgift 1

Approximera

$$\int_{1}^{2} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$$

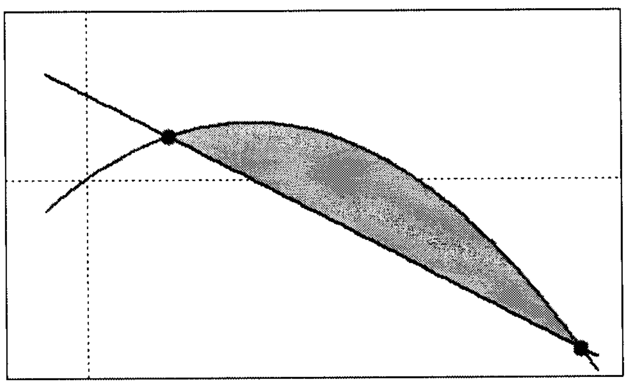
med trapetsregeln, steg $h = 0.25$.
Redovisa kalkylerna tydligt, gärna på tabellform.
Avrunda svaret till tre decimaler. (4 p)

Uppgift 2

Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan

$$2y = 4x - x^2 \quad \text{och linjen} \quad 2y = 6 - 3x$$

(markerat område i nedanstående figur).



Exakt svar, ej närmevärde. (5 p)

Uppgift 3

Bestäm en 2×2-matris X sådan att

$$\mathsf{AX} - \mathsf{B} = \mathsf{A}^2$$

då

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(5 p)

Uppgift 4

(a) Bestäm

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}\,dx.$$

(3 p)

(b) Beräkna

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^3 \cdot \cos(x^2)\,dx.$$

Exakt svar, ej närmevärde. (3 p)

Uppgift 5

Ange det eller de värden på parametern a för vilka ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay + 8z = -1 \\ ax - 2y = -1 \end{cases}$$

har oändligt många lösningar. Lös i förekommande fall ekvationssystemet fullständigt. (5 p)

Uppgift 6

Lös en och endast en av följande tre uppgifter.

Uppgift 6.1

Ett plan innehåller linjen L_1 och är parallellt med linjen L_2, där

$$L_1 : \begin{cases} x = 5+t \\ y = 6-t \\ z = 7+2t \end{cases}, \quad \text{respektive} \quad L_2 : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 5+t \\ z = 6+t \end{cases}$$

(a) Bestäm planets ekvation. (2 p)

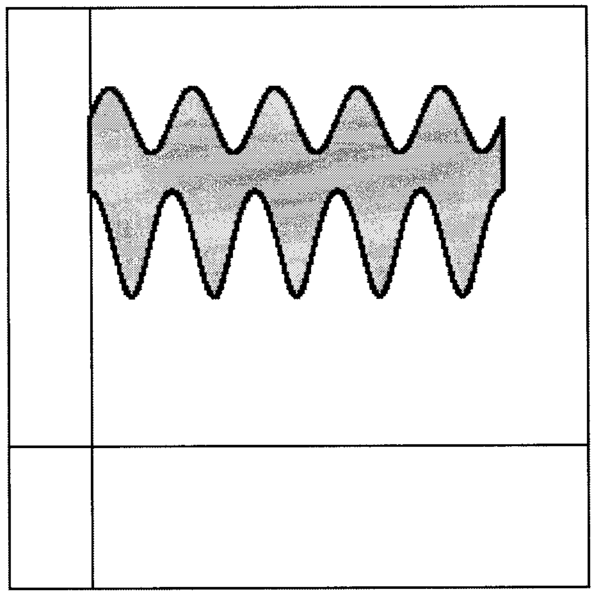
(b) Beräkna avståndet mellan planet du bestämde i (a)-uppgiften och linjen L_2. Exakt svar, ej närmevärde. (3 p)

Uppgift 6.2

Betrakta området, begränsat av kurvorna

$$y = \sqrt{5 + \sin(2\pi x)} \quad \text{och} \quad y = \sqrt{2 + \cos(2\pi x)}$$

mellan $x = 0$ och $x = 5$ (markerat område i nedanstående figur).



Området roterar kring x-axeln. Då genereras en rotationskropp. Beräkna rotationskroppens volym. Exakt svar, ej närmevärde. (5 p)

Uppgift 6.3

Betrakta en funktionskurva $y = f(x)$, $0 \leq a \leq x \leq b$. Då denna kurva roterar kring y-axeln, bildas en buktig yta, en s k *rotationsyta.* Arean av denna yta ges av formeln

$$A = \int_a^b 2\pi x \, ds \qquad \text{med bågelementet } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx$$

Uppgift: Bestäm med ovanstående formel arean av den rotationsyta som uppkommer då kvartscirkeln

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq R,$$

roterar ett varv kring y-axeln. (5 p)

Lösn. skisser MA043M 14-06-05

(1)

x	1	1,125	1,5	1,75	2
y	0,54030	0,28203	0,05776	−0,13474	−0,29426

$$T(0{,}25) = 0{,}25\left(\frac{0{,}54030 - 0{,}29426}{2} + \right.$$

$$\left. + 0{,}28203 + 0{,}05776 - 0{,}13474\right) \approx \underline{\underline{0{,}082}}$$

(2) Skärningspunkter: $4x - x^2 = 6 - 3x$

$x^2 - 7x + 6 = 0 \quad x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2}$ ↗ 6, ↘ $\underline{1}$

Arean: $\int_1^6 \left(2x - \frac{x^2}{2} - \left(3 - \frac{3x}{2}\right)\right) dx =$

$$= \int_1^6 \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{7x}{2} - 3\right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{7x^2}{4} - 3x\right]_1^6$$

$$= -\frac{216}{6} + \frac{252}{4} - 18 + \frac{1}{6} - \frac{7}{4} + 3 = \frac{-215}{6} + \frac{245}{4} - 15$$

$$= \frac{-430 + 735 - 180}{12} = \underline{\underline{\frac{125}{12}}}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$AX - B = A^2$, $AX = A^2 + B$,

$X = A^{-1}(A^2 + B)$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 25 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B = \begin{pmatrix} 14 & 25 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 27 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(A^2 + B) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 27 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(4a) $$\int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}\,dx = (*)$$

Ansats: $$\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{MGN} = \frac{x^2(A+B)+Cx+A}{MGN}$$

Balans:
$$\begin{aligned} A+B &= 1 && (x^2)\\ C &= 3 && (x)\\ A &= 2 && (\text{konst}) \rightarrow B=-1 \end{aligned}$$

$$\ldots (*) = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\arctan x + C$$

(4b) $$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^3\cos(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x^2\cos(x^2)\cdot x\cdot dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} x^2=u, \quad du = 2x\,dx, & dx = \frac{1}{2}du \\ x=0 \rightarrow u=0, & x=\sqrt{\pi/2} \rightarrow u=\pi/2 \end{array}\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} u\cos u\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left\{\left[u\sin u\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin u\,du\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[u\sin u + \cos u\right]_0^{\pi/2}\right\} = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

(5) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 8 \\ a & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right. \quad (*)$$

oändl många lösn då $\det(A)=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 8 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = (\text{utv } K3) = a(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & a \\ a & -2 \end{vmatrix} + 8(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & -2 \end{vmatrix}$$

$$= a(-4-a^2) - 8(-2-2a) =$$

$$= -a^3 - 4a + 16 + 16a = -a^3 + 12a + 16$$

$-a^3 + 12a + 16 = 0$ ($a=-2$ en rot)

$$\begin{array}{r|l} & -a^2+2a+8 \\ \hline a+2 & -a^3+12a+16 \\ & -a^3-2a^2 \\ \hline & \quad 2a^2+12a \\ & \quad 2a^2+4a \\ \hline & \qquad 8a+16 \\ & \qquad 8a+16 \\ \hline & \qquad\quad 0 \end{array}$$

Lös $(-1)(\underbrace{a^2-2a-8}) = 0$

$a = 1 \pm \sqrt{1+8}$, $a = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$\det(A) = 0 \iff \underline{a = 4, -2}$

Lös ekv $(*)$ med insatta a-värden

$\longrightarrow$

(5) forts

$a=4$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$ (-2) (-4)

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ - & - & - & - \end{array}\right) \leftarrow$ olösligt

$a=-2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 8 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$ (-2) (2)

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 12 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right)$

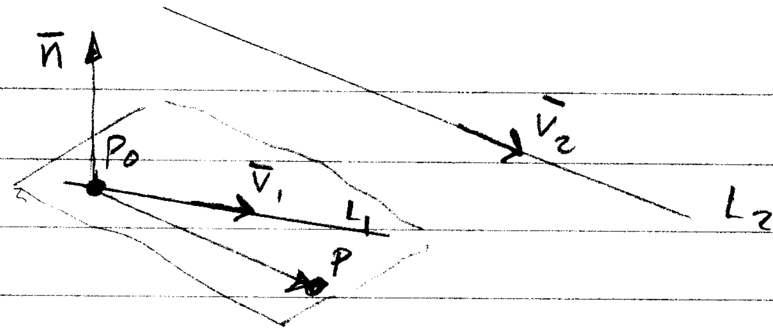
$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $x+1+4t-2t=1,\ x=-2t$

$-2y=-1-4t,\ y=\frac{1}{2}+2t$

$z=t$

Svar $a=-2$ ger $\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{1}{2}+2t \\ z = t \end{cases}$

(6.1a)



$P_0 = (5,6,7)$, $P = (x,y,z)$, $\overline{P_0P} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-6 \\ z-7 \end{pmatrix}$

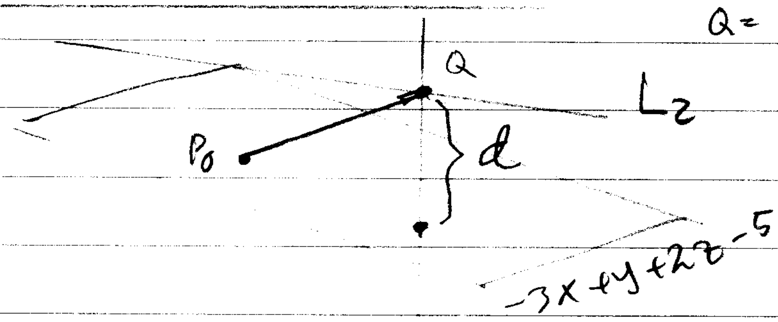
$$\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

planets ekv $\bar{n} \bullet \overline{P_0P} = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x-5 \\ y-6 \\ z-7 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-3)(x-5) + y-6 + 2(z-7) = 0$$

Svar $-3x + y + 2z - 5 = 0$

(6.1b) $Q = (3,5,6)$



$$\bar{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d = \left| (\overline{P_0Q} \bullet \bar{e}) \right| \qquad \bar{e} = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}}$$

$$\overline{P_0Q} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 5-6 \\ 6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

(6.2)

$$f(x) = \sqrt{5 + \sin(2\pi x)}$$
$$g(x) = \sqrt{2 + \cos(2\pi x)}$$

$$\text{Volym} = \int_0^5 \pi \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx$$

$$= \pi \int_0^5 \left(5 + \sin(2\pi x) - 2 - \cos(2\pi x) \right) dx$$

$$= \pi \left[3x - \frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} \right]_0^5 =$$

$$= \pi \left(15 - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) = \underline{\underline{15\pi}}$$

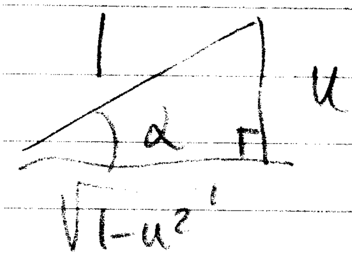
(6.3) $$A = \int_0^R 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} \, dx$$

$$= \int_0^R 2\pi x \sqrt{\frac{4(R^2 - x^2) + 4x^2}{4(R^2 - x^2)}} \, dx = 2\pi \int_0^R x \sqrt{\frac{4R^2}{4R^2 - 4x^2}} \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} dx = \left(\frac{x}{R} = u, \; dx = R\,du \quad 0 \to 0, \; R \to 1 \right)$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{Ru}{\sqrt{1 - u^2}} R\,du = (*) \ldots \rightarrow$$

(6.3) forts



$$\left[\begin{array}{ll} u = \sin\alpha & , \quad 0 \to 0, \quad 1 \to \pi/2 \\ du = \cos\alpha & \end{array}\right]$$

$$\ldots (*) = 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \tan\alpha \cdot \cos\alpha \, d\alpha$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\alpha \, d\alpha = 2\pi R^2 \Big[-\cos\alpha\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \underline{\underline{2\pi R^2}}$$ (... som förväntat!