M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Integralkalkyl, Föreläsning 2

Staffan Lundberg / Ove Edlund

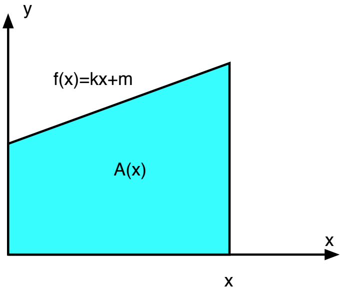
Luleå Tekniska Universitet

Föreläsning 1

Antag att

$$f(x) = kx + m, \quad x \geq 0.$$

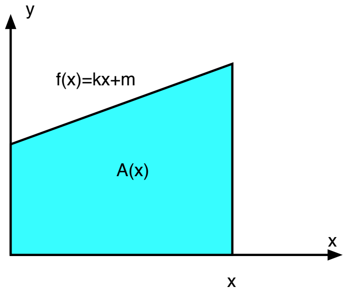
Bestäm arean av det färgade området, $A(x)$, som funktion av x.



Lösningsförslag

$A(x)$ är ett parallelltrapets.

$$A(x) = \frac{x(m + kx + m)}{2} =$$
$$= k \cdot \frac{x^2}{2} + mx.$$



- Beräkna $\frac{d}{dx}A(x)$.

Anmärkning

$$\frac{d}{dx}A(x) = \frac{d}{dx}\left(k \cdot \frac{x^2}{2} + mx\right) = kx + m.$$

Uppenbarligen gäller att $\frac{d}{dx}A(x) = f(x)$. Detta är ingen tillfällighet. Vi återkommer.

Inledning

När man deriverar en produkt får man

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Det innebär att $u \cdot v$ kan tolkas som en primitiv funktion:

$$u \cdot v = \int (u' \cdot v + v' \cdot u)\, \mathrm{d}x.$$

Detta kan alternativt formuleras:

$$\int u' \cdot v \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v' \, \mathrm{d}x.$$

Vi använder denna tankegång för att beräkna

- $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x} \cdot x \, \mathrm{d}x.$ $\quad (u' = \mathrm{e}^{x}, v = x)$

Integrationsmetoder: Partiell integration

Vi sätter $f(x) = u'(x)$ resp. $g(x) = v(x)$ och formulerar:

Antag att F är en primitiv funktion till f. Då gäller

$$\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Denna metod förutsätter att integranden kan tolkas som en produkt $f(x) \cdot g(x)$.

Normalfallet

Vi inser att partiell integration är relevant endast om metoden leder till *enklare* kalkyler än den ursprungliga.

Normalt väljs potensuttryck som den funktion man skall derivera – en derivering är ju – i detta fall – en gradtalssänkning och därmed en förenkling.

Att så inte alltid är fallet visas i följande exempel.

Exempel

$$\int x^2 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \quad$$ (Här måste vi *integrera* potensfunktionen)

$$f = x^2 \quad \Rightarrow F = x^3/3$$
$$g = \ln x \quad \Rightarrow g' = 1/x$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Anmärkning

Valet är självklart. Vi kan inte enkelt integrera $\ln x$, men vi har omedelbart derivatan av $\ln x$.

Ibland måste den partiella integrationen utföras iterativt, enligt följande exempel.

Exempel

$$\int x^2 \cdot \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$\boxed{\begin{aligned} f = \cos x \quad &\Rightarrow \quad F = \sin x \\ g = x^2 \quad &\Rightarrow \quad g' = 2x \end{aligned}}$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x =$$ (Andra varvet)

Andra varvet

$$
\begin{aligned}
f = \sin x \quad &\Rightarrow \quad F = -\cos x \\
g = 2x \quad &\Rightarrow \quad g' = 2
\end{aligned}
$$

$$
= x^2 \sin x - \left(2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x)\,\mathrm{d}x \right) =
$$

$$
= (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + C.
$$

Viktigt exempel

Bestäm

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx.$$

Här går det inte att eliminera någon av faktorerna. Vi skall trots det integrera partiellt.

- Oväsentligt vilken funktion man väljer att integrera/derivera.
- Iterera tills ursprunglig integral framträder.

Avslutande exempel

Bestäm

$$\int x \cdot \arctan x \, \mathrm{d}x.$$

Försök på egen hand

Bestäm

$$I = \int x^2(x^2 - 2)^5 \, \mathrm{d}x$$

Lösningsförslag–tjuvkika inte

$$I = \int x^2(x^2-2)^5 \,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{aligned} f = x^2 \quad &\Rightarrow \quad F = x^3/3 \\ g = (x^2-2)^5 \quad &\Rightarrow \quad g' = 5(x^2-2)^4 \cdot 2x \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot (x^2-2)^5 - \int \frac{x^3}{3} \cdot 5(x^2-2)^4 \cdot 2x \,\mathrm{d}x.$$

Upprepad partiell integration

$$I = \frac{x^3}{3}(x^2-2)^5 - \left\{\frac{2}{3}(x^2-2)^4x^5 - \left(\frac{16}{21}(x^2-2)^3x^7 - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\frac{32}{63}(x^2-2)^2x^9 - \left[\frac{128}{693}x^{13} - \frac{256}{693}x^{11} - \frac{256}{9009}x^{13}\right]\right)\right)\right\} =$$

$$= \ldots = \frac{1}{13}x^{13} - \frac{10}{11}x^{11} + \frac{40}{9}x^9 - \frac{80}{7}x^7 + 16x^5 - \frac{32}{3}x^3$$

Överkurs-betonat exempel: Läs (och lös) på egen hand

Beräkna följande integral med hjälp av partiell integration. Låt $u(x)$ vara en minst tre gånger deriverbar funktion.

$$I = \int \cos u \cdot \left(u^{(3)} + \frac{(u')^3}{2} \right) \, \mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag–tjuvkika inte

$I = I_1 + I_2$, där

$$I_1 = \int \cos u \cdot u^{(3)}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int \cos u \cdot \frac{(u')^3}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Integralen I_1

$$I_1 = \int \cos u \cdot u^{(3)}\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{aligned} f = u^{(3)} \quad &\Rightarrow \quad F = u'' \\ g = \cos u \quad &\Rightarrow \quad g' = \underbrace{-\sin u \cdot u'}_{\text{Kedjeregeln}} \end{aligned}$$

$$= \cos u \cdot u'' - (-1) \cdot \underbrace{\int \sin u \cdot u' \cdot u''\,\mathrm{d}x}_{=I_3}$$

Integralen I_3

$$\int \sin u \cdot u' \cdot u'' \, \mathrm{d}x =$$

$$f = u' \cdot u'' \quad \Rightarrow \quad F = \frac{(u')^2}{2}$$

$$g = \sin u \quad \Rightarrow \quad g' = \cos u \cdot u'$$

$$= \frac{(u')^2}{2} \cdot \sin u - \int \frac{(u')^2}{2} \cdot \cos u \cdot u' \, \mathrm{d}x.$$

Avslutningsvis

$$I = I_1 + I_2 =$$
$$= \cos u \cdot u'' + \frac{(u')^2}{2} \cdot \sin u - \int \frac{(u')^2}{2} \cdot \cos u \cdot u' \, \mathrm{d}x +$$
$$+ \int \cos u \cdot \frac{(u')^3}{2} \, \mathrm{d}x = \cos u \cdot u'' + \frac{(u')^2}{2} \cdot \sin u + C.$$