M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Integralkalkyl, Föreläsning 3

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Bestäm

$$\int x \sin(\ln x)\, dx$$

Integrationsmetoder: Variabelbyte

Analysens huvudsats kan ses som ett sorts ”skelett”, på vilket man tillfogar diverse metoder - allt i syfte att göra integralberäkningen smidigare.

Vi inleder med att betrakta en av dessa metoder, nämligen variabelbytet. Antag att $F(g(x))$ är en primitiv funktion till $f(g(x))$. Vi deriverar med kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Detta betyder att

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C.$$

Vi får emellertid samma resultat om vi beräknar

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C = F(g(x)) + C,$$

där vi sätter $u = g(x)$, $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Varför gör man ett variabelbyte? Den främsta orsaken är väl att åstadkomma en primitiv funktion som är enklare att beräkna än den ursprungliga.

Variabelbytet som metod, ofta i kombination med en primitiv funktion ur tabellen med standardprimitiver, tillhör vardagssysslorna när det gäller integrering.

Exempel

Beräkna

$$\int (x^2 - 1)^2 \cdot 2x \, \mathrm{d}x$$

- genom att kvadrera och multiplicera in faktorn $2x$,
- genom att göra variabelbytet $u = x^2 - 1$.

Exempel

Beräkna

- $\displaystyle\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x \quad ,$
- $\displaystyle\int x^2 \sqrt{x^3 + 4}\,\mathrm{d}x \quad .$

Speciella manipuleringar

Ibland måste man skriva om integranden på ett eller annat sätt, innan vi sätter variabelbytet i arbete.

I nedanstående exempel redovisas en ofta använd teknik - kvadratkompletteringen.

Exempel Beräkna

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Förslag till lösning

Kvadratkomplettera nämnaren:

$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$ (Känns detta avlägset–repetera Matte 1)

gör därefter lämpligt variabelbyte.
Fullfölj kalkylerna som nyttig övning.

Funktionssamband

Ibland är det lämpligt att införa variabelbytet via ett (inverterbart) funktionssamband.

Exempel Beräkna

$$\int x\sqrt{x-4}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Lösningsförslag

Vi sätter $u = \sqrt{x-4}$ och löser ut x som funktion av u:

$$\int x\sqrt{x-4}\,\mathrm{d}x =$$

$$u = \sqrt{x-4} \Rightarrow x = u^2 + 4$$

$$\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$$

$$\int (u^2+4)\,u\,2u\,\mathrm{d}u \qquad \underbrace{\ldots}_{\text{Övn.}}$$

(Svar $2/5(x-4)^{5/2} + 8/3(x-4)^{3/2} + C$)

Anmärkning

Eftersom det är fråga om obestämda integraler(dvs. primitiva funktioner), avslutas det hela med att

återgå till den ursprungliga variabeln x.

Avslutande exempel

Beräkna

$$\int_0^1 \cos(1+\sqrt{x})\,dx.$$

Lösningsförslag

Vi sätter $u = 1 + \sqrt{x}$ och löser ut x som funktion av u:

$$\int_0^1 \cos(1 + \sqrt{x})\, dx.$$

$$u - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x = (u-1)^2$$

$$\mathrm{d}x = 2(u-1)\,\mathrm{d}u$$

Gränser $\quad x = 0 \to u = 1, \quad x = 1 \to u = 2$

$$2\int_1^2 \cos(u)\cdot(u-1)\,\mathrm{d}u \qquad \underbrace{\ldots}_{\text{Övn.}}$$

(Svar $2\,(\sin(2) + \cos(2) - \cos(1))$)