M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Integralkalkyl, Föreläsning 4

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Bestäm

- $$\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x.$$
- $$\int e^{2x}\sqrt{1+e^x} \, \mathrm{d}x.$$

Integraler av rationella funktioner

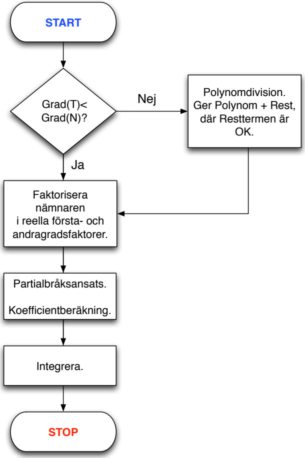
Vi skall nu betrakta integrander av typen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad ,$$

där $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom. Vi skall arbeta oss igenom följande flödesschema. Det består av följande huvudkomponenter:

- Polynomdivision i förekommande fall,
- Faktorisering av nämnaren samt partialbråksansats,
- Integrering.

Flödesschema



Polynomdivision

För att beräkningen skall vara meningsfull, krävs att täljarens gradtal är lägre än nämnarens gradtal. Om inte, måste en division utföras:

$$f(x) = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\text{ , där grad } (R) < \text{grad } (Q),$$

och där kvoten $K(x)$ är ett polynom.

Exempel

Beräkna

$$\int \frac{x^3 + 3x^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Rationella funktioner och partialbråk

Varje rationell funktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad ,$$

där $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom, med grad(P) $<$ grad (Q), kan skrivas som en summa av partialbråk.

Anm Beviset ligger utanför denna kurs. Brukar beröras i mer avancerade kurser.

Anmärkning

En summa av delbråk kan, som vi känner till, skrivas som ett bråk:

$$\frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{x+2} = \frac{2x(x+2)+3(x^2+1)}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{5x^2+4x+3}{(x^2+1)(x+2)}$$

Vad partialbråksuppdelning handlar om, är att göra det motsatta:

- Att skriva bråket som en summa av enklare delbråk, vars nämnare är består av reella första- och andragradsfaktorer.
- Andragradsfaktorerna är irreducibla.
  Anm Här förekommer ofta kvadratkomplettering när man integrerar.

Nämnarens faktorisering ger upphov till följande partialbråk:

Faktor i nämnaren	Ger upphov till partialbråken
$x-a$	$\dfrac{A}{x-a}$
$(x-a)^n$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a)^k}$
x^2+bx+c	$\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$
$(x^2+bx+c)^n$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_kx+B_k}{(x^2+bx+c)^k}$

Arbetsmetod

Exempel Bestäm

$$\int \frac{x^2 + 6x + 13}{(x^2 - 1)(x - 3)}\, dx$$

Lösningsförslag

Gradtalskontroll visar att vi direkt kan gå till att faktorisera nämnaren:

$$\frac{x^2+6x+13}{(x^2-1)(x-3)} = \frac{x^2+6x+13}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

Ansats

Vi gör ansats för partialbråk enligt tabellen:

$$\frac{x^2+6x+13}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

Därefter gör vi omskrivning på gemensam nämnare:

$$\frac{x^2+6x+13}{(x-1)(x+1)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-3)} + \frac{B(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-3)} + \frac{C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

Identifiering–balansekvation

Identifiering av koefficienter i täljarna i bägge led:

$$
\begin{array}{crcrcrcr}
① & A & + & B & + & C & = & 1 \\
② & -2A & - & 4B & & & = & 6 \\
③ & -3A & + & 3B & - & C & = & 13
\end{array}
$$

Detta ekvationssystem har lösningarna $A = -5$, $B = 1$, $C = 5$ (Kolla på egen hand).

Vi får slutligen:

$$\int \frac{x^2+6x+13}{(x^2-1)(x-3)}\,dx =$$

$$= \int \left(-\frac{5}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-3} \right) dx =$$

(Partialbråken ger enkla kalkyler)

$$= -5\ln|x-1| + \ln|x+1| + 5\ln|x-3| + C$$

Alternativ: Handpåläggning

För rationella funktioner vars nämnare enbart har reella förstagradsfaktorer, kan konstanterna A, B, C bestämmas med en snabbare metod, kallad handpåläggningsmetoden.

$$\frac{x^2+6x+13}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

Vi bestämmer A genom att i vänstra ledet täcka över faktorn $(x-1)$ (som hör till delbråket med A som täljare), sätta in $x = 1$ i övriga faktorer i vänstra ledets täljare och namnare i vänstra ledet, och räkna ihop. Vi får $A = \dfrac{20}{2\cdot(-2)} = -5$.

Bestäm som nyttig övning konstanterna B och C med handpåläggning.

Exempel

Partialbråksuppdela den rationella funktionen

$$\frac{x^3 + x + 1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Svar: $-\frac{1}{6x} + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{11}{2(x-2)} + \frac{31}{6(x-3)}$

Avslutande exempel

Bestäm

$$\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin x - 1)}\,\mathrm{d}x \quad .$$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$$

Det är viktigt att du på egen hand läser (och löser) nästa exempel. Fråga mig eller någon annan om du inte riktigt hänger med i resonemanget.

Läs och lös på egen hand

Beräkna

$$\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + 2x}\, dx.$$

Lösningsförslag–Tjuvkika inte

Gradtalskontroll: OK. Efter faktorisering innehåller nämnaren en förstagradsfaktor och en irreducibel andragradsfaktor. Vi ansätter

$$\frac{1}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}.$$

Omskrivning på gemensam nämnare:

$$\frac{1}{x^3+2x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} =$$
$$= \frac{A(x^2+2x+2)+x(Bx+C)}{x^3+2x^2+2x}$$

Identifiering av koefficienter i täljarna i bägge led:

$$\begin{array}{cccccccc} ① & A & + & B & & & = & 0 \\ ② & 2A & & & + & C & = & 0 \\ ③ & 2A & & & & & = & 1 \end{array} \quad (1)$$

Ekvationssystemet (1) har lösningarna $A = 1/2$, $B = -1/2$, $C = -1$.

Vi får

$$\int \frac{1}{x^3+2x^2+2x}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{x} + \frac{-x/2-1}{(x+1)^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{x}{(x+1)^2+1}\,dx}_{I_1} - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

Partialbråksintegralen består av termer som vi förhoppningsvis kan bemästra. Vi utför nu förenklingar på I_1.

Integralen I_1

$$\int \frac{x}{(x+1)^2+1}\,dx = \qquad \text{(Variabelbyte)}$$

$$u = x+1 \quad , \quad x = u-1$$
$$\mathrm{d}u \quad = \quad \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{u}{u^2+1}\,du - \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \arctan u =$$
$$= \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+1) - \arctan(x+1).$$

Sammanfattning

$$\int \frac{1}{x^3 + 2x^2 + 2x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln((x+1)^2 + 1) - \frac{1}{2}\arctan(x+1) + C.$$

Lös på egen hand

Bestäm

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$

Svar: $2\arctan\left(\sqrt{x-1}\right) + C$

Fakta: Om faktorisering och partialbråksansatser

Ifrån den komplexa analysen hämtar vi en klassisk sats:

Ett godtyckligt polynom med reella koefficienter kan uppdelas i reella förstagrads- och andragradsfaktorer. Observera att andragradsfaktorerna saknar reella rötter. (Gauss, 1799)

Lägg märke till att vi nu arbetar med rationella uttryck, där täljarens gradtal är lägre än nämnarens gradtal.

Faktoruppdelning av nämnaren

Nämnaren i $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ har efter faktoriseringen följande utseende:

$$
\begin{aligned}
&Q(x) = C(x-a_1)^m \cdot (x-a_2)^n \cdots \\
&\cdots \underbrace{(x^2+b_1x+c_1)^p \cdot (x^2+b_2x+c_2)^r}_{\text{Går ej att ytterligare reducera}} \cdots \qquad ,
\end{aligned}
$$

där $a_1, a_2, \ldots$ är (de reella) rötterna till $Q(x)$.