M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Integralkalkyl, Föreläsning 5

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Bestäm

$$\int \left(\frac{1/2}{x} + \frac{-\frac{1}{2}x - 1}{x^2 + 2x + 2} \right) dx$$

Att integrera trigonometriska uttryck

Genom att nyttja speciella variabelbyten och diverse trigonometriska formler, kan integralen av ett trigonometriskt uttryck ge enklare kalkyler.

Exempel Beräkna

- $\int \cos^2 x(-\sin x)\,\mathrm{d}x \quad ,$

Vanliga variabelbyten

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \begin{array}{rcl} \sin x & = & t, \\ dt & = & \cos x \, \mathrm{d}x \end{array} = \int f(t) \, \mathrm{d}t$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = \begin{array}{rcl} \cos x & = & t, \\ dt & = & -\sin x \, \mathrm{d}x \end{array} = -\int f(t) \, \mathrm{d}t$$

Vanliga omskrivningar

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Beräkna

- $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x \quad .$

Mindre vanliga omskrivningar

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$$

Exempel

Bestäm

$$\int \sin(x) \cdot \cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$$

Exempel

Beräkna integralen

$$\int \cos^3 2x \cdot \sin 2x \, dx$$

Avslutande exempel – litet knepigare

Beräkna integralen

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

Lösningsförslag

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{1}{1 + \tan x}\, dx = \dots$$

$$u = \tan x, \qquad \frac{du}{dx} = 1 + \tan^2 x$$

$$dx = \frac{du}{1 + u^2}$$

Att läsa och lösa själv: Reduktioner

Att beräkna integralen $\int \sin^{10} x\, dx$ ter sig rätt så mödosamt. Av detta skäl har man tagit fram s.k. reduktionsformler, vilka underlättar räknandet högst väsenligt.
Vi antar att $n \in \mathbb{Z}_+$.

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx$$

Vi härleder formeln.

Härledning

$$I = \int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx = \quad \text{(Part. int.)} =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + \int \cos^2 x (n-1) \sin^{n-2} x \, dx = \quad \text{(Trig. ettan)} =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx =$$

Forts.

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)I \quad \text{(Förenkla)}$$

$$I + (n-1)I = nI = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx$$

$$I = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

Anm För $\int \cos^n x\,dx$ finns analoga reduktioner.

Exempel

Bestäm

$$\int \sin^4 x \, dx \quad \text{på ena eller andra sättet.}$$

- $\displaystyle \int \sin^4 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \dots$
- Reduktion

Lösningsförslag–Reduktion

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

Sätt $n = 4$ i ovanstående formel

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx \quad \text{(Trig. omskrivn.)} =$$

$$-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{1}{8}\sin^2 x \sin 2x + \frac{3}{8}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1-\cos 2x}{16}\sin 2x + \frac{3x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x =$$

$$= -\frac{\sin 2x}{16} + \frac{\sin 4x}{32} + \frac{3x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x =$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$$