M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Integralkalkyl, Föreläsning 6

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Bestäm

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x \, \mathrm{d}x.$$

Funktionssamband

Under Föreläsning 3 tittade vi på ett speciellt variabelbyte. Det (inverterbara) funktionssambandet.

Exempel Beräkna

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Lösningsförslag

Vi sätter $u = \sqrt{x}$ och löser ut x som funktion av u:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2$$

$$\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$$

$$\int e^{u}\,2u\,\mathrm{d}u \qquad \underbrace{\ldots}_{\text{Övn.}}$$

(Svar $2\left(\sqrt{x} - 1\right) e^{\sqrt{x}} + C$)

Anmärkning

Eftersom det är fråga om obestämda integraler(dvs. primitiva funktioner), avslutas det hela med att

återgå till den ursprungliga variabeln x.

Inverterbara trigonometriska variabelbyten

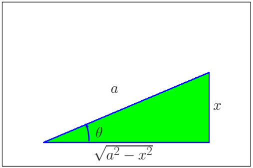
- $x = a \sin \theta$
- $x = a \tan \theta$

ger oss möjlighet att bestämma en del knepiga integraler.

Integraler som innehåller $\sqrt{a^2 - x^2}$

$\sqrt{a^2 - x^2}$ tolkas som en av kateterna i en ”hjälptriangel”.

$$a \sin\theta = x, \quad dx = a\cos\theta\, d\theta$$



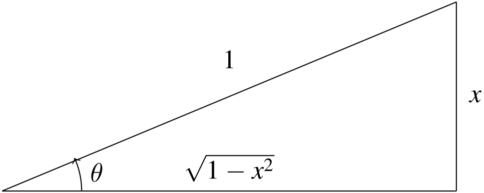
$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$ (Anm Vi antar $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$)

Exempel

Bestäm

$$\int x \cdot \arcsin(x)\, dx$$

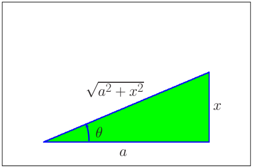
Substitutionen $\theta = \arcsin x$ är användbar.



Integraler som innehåller $\sqrt{a^2 + x^2}$

$\sqrt{a^2 + x^2}$ tolkas som hypotenusan i en "hjälptriangel".

$$a \tan\theta = x, dx = a \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta$$
$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$



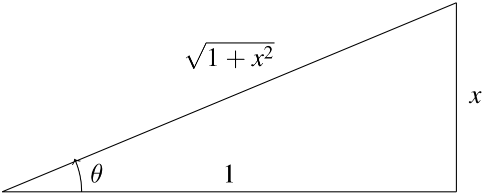
Anm Vi antar $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$

Avslutande exempel

Bestäm

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$$

Använd substitutionen $x = \tan\theta$.



Svar: $\frac{1}{2}\left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2}\right) + C$