M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Integralkalkyl, Föreläsning 7

Staffan Lundberg / Ove Edlund

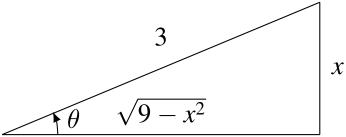
Luleå Tekniska Universitet

- Bestäm

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$$

Använd substitutionen $x = 3\sin\theta$ samt utnyttja

$$\cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1$$
$$\frac{d}{dx}(\cot\theta) = -\frac{1}{\sin^2\theta}$$



Areaproblemet

Under Föreläsning 1 nämnde vi att bl. a. area- och volymberäkning förebådade differential- och integralkalkylen.
Vi berörde också Newtons banbrytande upptäckt att en area kunde bestämmas genom ”antiderivering”.

Exempel Bestäm arean av det område som begränsas av funktionskurvan

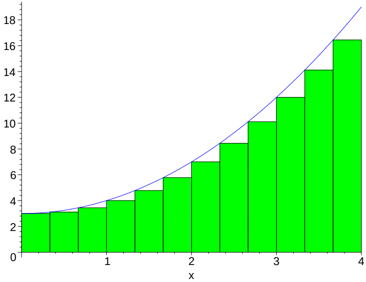
$$y = x^2 + 3 \quad ,$$

x-axeln samt linjerna $x = 0$ respektive $x = 4$.

Steg 1

Vi delar in intervallet i ett ändligt antal delar (som inte behöver vara lika stora, men av bekvämlighetsskäl gör vi så - här väljer vi 12 lika stora delar) (denna indelning kallas *partitionen* P).
Därefter bildar vi delrektanglar med basen $\Delta x = 1/3$ och höjden i varje delrektangel väljs som funktionsvärdet i delintervallens vänstra ändpunkt.

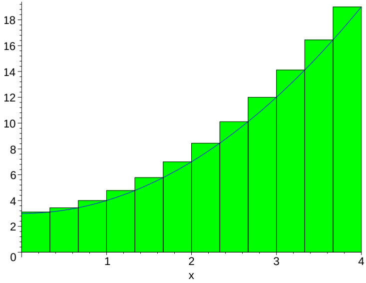
Vi approximerar därefter den sökta arean med totala summan av våra åtta rektangelareor. Denna summa kallas *undersumma* och betecknas $L(f, P)$.



Den sammanlagda rektangelarean blir ungefär 30.7 areaenheter.

Steg 2

Nu upprepar vi proceduren. Denna gång bildar vi delrektanglar med basen där höjden i varje delrektangel väljs som funktionsvärdet i delintervallens högra ändpunkt.

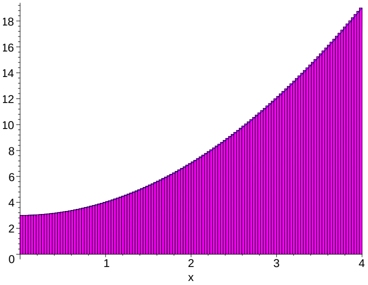


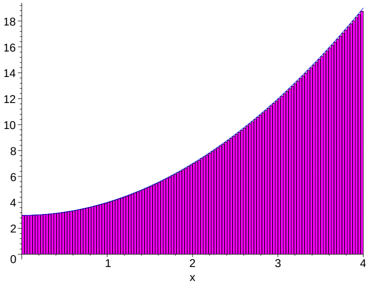
Vi approximerar därefter den sökta arean med totala summan av våra åtta rektangelareor. Denna summa kallas *översumma* och betecknas $U(f,P)$. Den sammanlagda rektangelarean blir ungefär 36.07 areaenheter. Vi konstaterar:

$$L(f,P) \leq \text{ sökt area } \leq U(f,P).$$

Steg 3

Nu upprepar vi proceduren, men med fler delningspunkter. Vi väljer en partition som delar intervallet i 128 delintervall. Basen i varje delrektangel förkortas därmed. I övrigt föreligger inga skillnader jämfört med Steg 1 och 2.





Vi noterar att delrektanglarna allt bättre ansluter sig till den sökta arean. Undersumman blir ungefär 33.08, medan översumman blir approximativt 33.58 areaenheter.

Så fortsätter proceduren. När antalet delrektanglar går mot oändligheten (dvs. när längden av en delrektangels bas, Δx, närmar sig noll), kan vi göra följande definition:

Definition

Antag att funktionen $f(x)$ är definierad i intervallet $a \leq x \leq b$. Gör en indelning av $[a, b]$ i ett ändligt antal delningspunkter

$$P = \{x_0 < x_1 < \cdots x_n\} \quad ,$$

där $x_0 = a$ och $x_n = b$. Välj punkter l_i och u_i i varje delintervall, och bilda *Riemann(under)summan*

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\, \Delta x_i \quad .$$

Bilda sedan *Riemann(över)summan*

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\, \Delta x_i \quad .$$

Låt $n \to \infty$. Om Riemannsummorna konvergerar mot ett gemensamt gränsvärde I, kallas detta gränsvärde *integralen* av f mellan a och b:

Viktigt gränsvärde

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x_i =$$

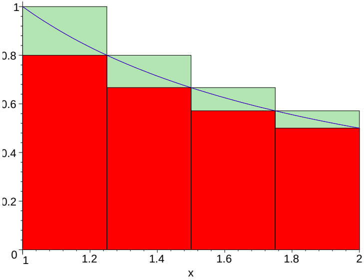
$$= I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

Anm Exakta areavärdet i vårt exempel är $100/3 \approx 33.33$.

Exempel

Använd "trappfunktionerna" i nedanstående figur för att visa att

$$0.63 \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 0.76 \quad .$$



Räkneregler

Antag att f och g är integrerbara över $[a,b]$. Då gäller

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= A\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + B\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Räkneregler, forts

$$f(x) \leq g(x) \text{ i } [a,b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Integralkalkylens medelvärdessats (IMVS)

Vi känner nog till att det aritmetiska medelvärdet A av n positiva tal $a_1, \ldots, a_n$ kan skrivas

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \quad .$$

Antag att vi har en godtycklig kontinuerlig funktion f på ett slutet intervall $[a, b]$. Vi delar in $[a, b]$ i n lika stora delintervall av längd $\Delta x = (b - a)/n$.

Låt oss beräkna funktionsvärdet $f(x_k)$ i varje delintervall. Medelvärdet av dessa funktionsvärden är

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} =$$

$$= \frac{\overbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x}^{\text{Riemannsumma för } f \text{ på } [a,b]}}{b-a} \quad .$$

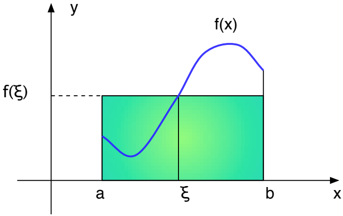
Om vi låter antalet delintervall gå mot oändligheten, konvergerar detta medelvärde mot en integral.

Definition

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$. Då existerar en punkt c, $a \leq c \leq b$, sådan att

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c) \quad .$$

Talet $f(c)$ betecknas ofta $\bar{f}$ och kallas *medelvärdet* av f på $[a,b]$.



Anmärkning

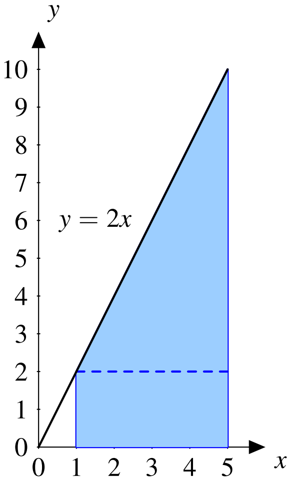
En fysikalisk tolkning av satsen: Anta att ett föremål rör sig med (icke-negativa) farten $v(t)$ under tidsintervallet $a \leq t \leq b$. Den tillryggalagda sträckan är $\displaystyle\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.

Medelvärdessatsen säger: Den tillryggalagda sträckan under tidsintervallet $a \leq t \leq b$ är lika med medelfarten gånger tiden.

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = \overline{v} \cdot (b-a).$$

Exempel

Bestäm medelvärdet av $f(x) = 2x$ på intervallet $[1, 5]$.



Avslutande exempel

Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n}^{n+1} (1 + \frac{x}{t})^{t} \, \mathrm{d}t \quad .$$

Lösningsförslag

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} (1 + \frac{x}{t})^t \, dt = \quad \text{(IMVS)}$$

$$= \lim_{c\to\infty} (1 + \frac{x}{c})^c = \quad (n \leq c \leq n+1)$$

$$= e^x \quad \text{(Standardgränsvärde 3.11 (e))}$$

Lös på egen hand

Bestäm medelvärdet av

$$f(x) = e^{-x} + \cos x \quad \text{på intervallet } [-\pi/2, 0].$$

Svar: $2/\pi \cdot e^{\pi/2}$