M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Integralkalkyl, Föreläsning 10

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Betrakta räta linjen $y = kx + m$, $a \leq x \leq b$.

- Använd avståndsformeln för att bestämma linjesegmentets längd.
- Verifiera denna längd med båglängdsintegralen.

Tillämpningar:Beräkning av volymer

Vi låter Ω beteckna en kropp i rummet, med egenskapen att arean av ett godtyckligt plant snitt vinkelrätt mot en viss linje är en kontinuerlig funktion av snittets läge.

Vi väljer x-axeln till denna linje och betecknar snittarean med $A(x)$. Vi antar vidare att kroppen är belägen mellan planen $x = a$ och $x = b$.

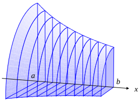


Figure 7-2

Låt oss betrakta ett litet volymselement ΔV_i genom att snitta kroppen så att en planparallell skiva med bredd Δx_i uppkommer. I intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ väljer vi en punkt c_i.

Skivans volym kan då approximeras med en "cylindervolym":

$$\Delta V_i = A(c_i)\Delta x_i$$

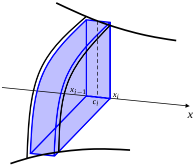


Figure 7-3

Vi adderar dessa bidrag för att få ett närmevärde till volymen:

$$V = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i \quad ,$$

vilket är en Riemannsumma för integralen

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

Skivformeln

Volymen $V(\Omega)$ av en kropp Ω mellan $x = a$ och $x = b$ med tvärsnittsarea $A(x)$ kan skrivas

$$V(\Omega) = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

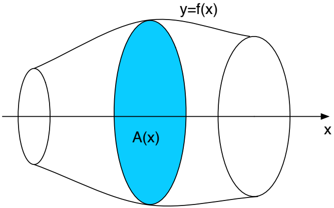
Anmärkning

Skivformelns huvudproblem är att bestämma areafunktionen $A(x)$.
Detta är i allmänhet ingen trivial uppgift.

Vi skall i denna kurs betrakta ett viktigt specialfall.

Rotationsvolymer

Antag att området, begränsat av funktionskurvan $y = f(x)$, x-axeln samt linjerna $x = a$ och $x = b$ roterar kring x-axeln.



Cirkulärt tvärsnitt

Tvärsnittet är cirkulärt med arean

$$A(x) = \pi f^2(x), \quad (\pi \text{ ggr radien i kvadrat})$$

och rotationskroppens volym är

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exempel

Bestäm volymen av ett klot med radie a, genom att låta kurvan

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}\ , -a \leq x \leq a,$$

rotera kring x-axeln.

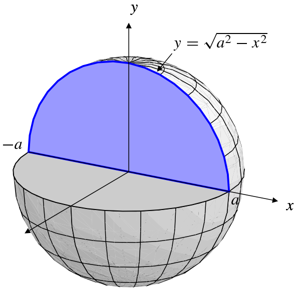


Figure 7-5-a

Exempel

Vid rotation av kurvan

$$y = x^2 \ , \ 1 \leq x \leq 2,$$

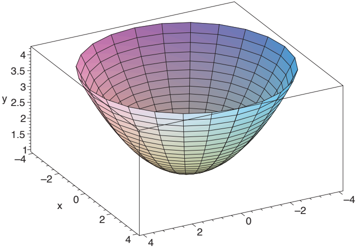
kring x-axeln uppkommer en rotationskropp. Bestäm dess volym.

Exempel

Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då området, begränsat av kurvan

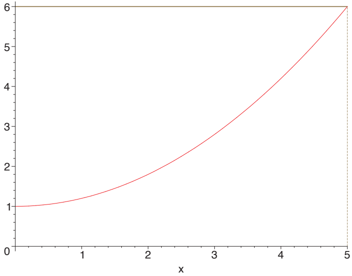
$$y = \frac{x^2}{5} + 1,$$

y-axeln samt linjerna $y = 1$ och $y = 6$ roterar kring y-axeln.



Lösningsförslag

Vi betraktar figuren och inser att snittytan är cirkulär med arean πx^2.



Volymen av rotationskroppen blir med skivformeln

$$V = \int_1^6 \pi x^2 \, \mathrm{d}y.$$

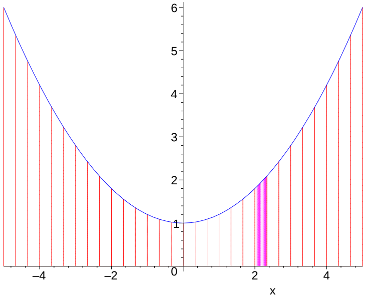
Vi måste uttrycka x som funktion av y. Detta ger

$$V = \int_1^6 \pi \cdot \underbrace{5(y-1)}_{x^2} \, \mathrm{d}y = \ldots = 125/2 \cdot \pi.$$

Beräkning av volymer:Cylindriska rör

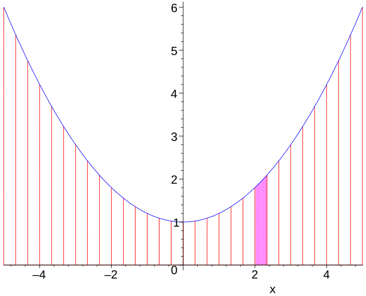
Ibland måste man använda andra volymselement än cylindriska skivor.

Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området, begränsat av kurvan $y = x^2/5 + 1$, x-axeln och linjerna $x = 0$ och $x = 5$ roterar kring y-axeln.



Rörelement

Vi betraktar rotationskroppen, efter att ha gjort en indelning i "tunna" segment.

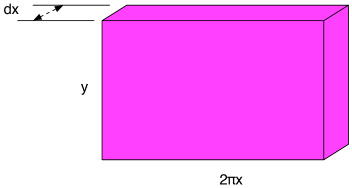


Låt det markerade segmentet rotera kring y-axeln. Då uppkommer ett tunt cylindriskt rör vars mått vi approximativt kan sätta till följande:

Rörelementets volym

- radie x,
- tjocklek $\mathrm{d}x$,
- höjd y.

Om vi ”böjer ut” röret, kan vi enkelt bestämma rörets volym $\mathrm{d}V$.



$$\mathrm{d}V = 2\pi x \, \mathrm{d}x \cdot y.$$

Rörformeln

och rotationskroppens volym är

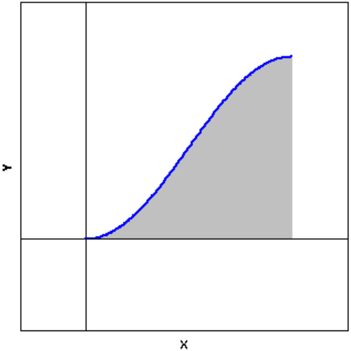
$$V = \int_0^5 \mathrm{d}V = \int_0^5 2\pi x \cdot y \, \mathrm{d}x$$

Den sökta volymen blir (med $y = x^2/5 + 1$):

$$V = \int_0^5 2\pi x \cdot y \, \mathrm{d}x = \int_0^5 2\pi x \cdot (\frac{x^2}{5} + 1) \, \mathrm{d}x.$$

Avslutande exempel

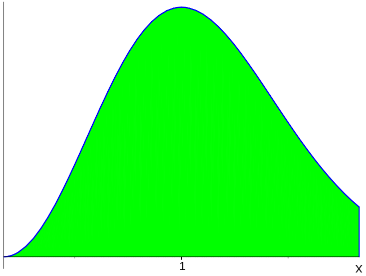
Det skuggade området (se figur), begränsat av x-axeln, linjen $x = \pi/2$ och kurvan $y = \sin^2 x$, bringas i rotation kring y-axeln. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen.



Det är viktigt att du på egen hand läser (och löser) de två följande exemplen. Exemplen visar på nyttiga strategier i räknearbetet.

Räkna på egen hand

Beräkna volymen V av den rotationskropp som uppstår då området, begränsat av kurvan $y = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$, positiva x-axeln samt linjen $x = X$ roterar runt y-axeln.

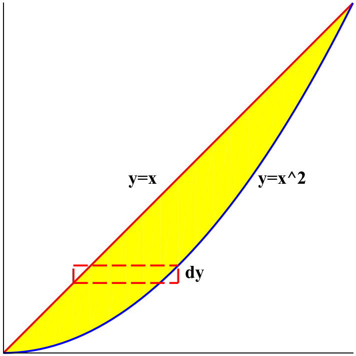


Beräkna även $\lim\limits_{X\to\infty} V$.

Svar: $2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{(X^2+1)\,e^{-X^2}}{2} \right)$ resp. π

Läs och lös på egen hand

Betrakta området R begränsat av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$. Beräkna volymen V av den resulterande kroppen när området R roteras kring y-axeln.

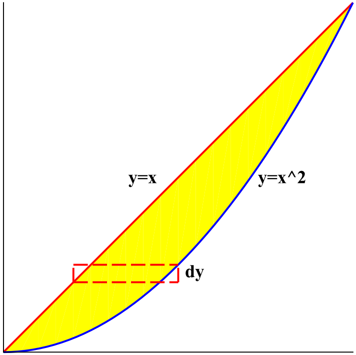


Lösningsförslag–tjuvkika inte

Areaelementet $A(y)$ är en ihålig cirkelskiva:

$$A(y) = \pi(\sqrt{y})^2 - \pi y^2.$$

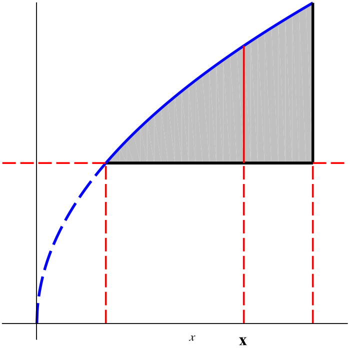
Volymselementet $dV = A(y)\,dy$.



$$V = \pi \int_0^1 (y - y^2)\,dy = \ldots \quad \text{(Svar } \pi/6.\text{)}$$

Extraövning

Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området begränsat av $y = \sqrt{x}$ och linjerna $y = 1$, $x = 4$ roteras kring $y = 1$. (Svar $7/6\pi$)



Lösningsförslag–tjuvkika inte

Skivformeln.

$$V = \int \mathrm{d}V =$$

Volymelementet $\mathrm{d}V = \pi(\sqrt{x} - 1)^2 \, \mathrm{d}x = \pi(x + 1 - 2\sqrt{x}) \, \mathrm{d}x$

$$= \int_1^4 \pi(x + 1 - 2\sqrt{x}) \, \mathrm{d}x = \ldots = \pi \cdot \frac{63 - 56}{6}$$