M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 1

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Lärare

Ove Edlund

Föreläsningar för Luleå, Malmfälten och Filipstad
Övningar för Luleå och Malmfälten
e-post: ove.edlund@ltu.se
Rum: E191

Åsa Widmark

Övningar i Filipstad

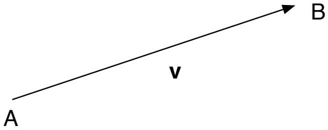
Eva Lövf

Lektioner och övningar i Skellefteå

Vektorer

Vektorer är ett mycket viktigt och användbart verktyg för att kunna beskriva sammanhang som innehåller riktade storheter, t.ex. kraft och hastighet.

Vektoriella storheter skiljer sig på ett fundamentalt sätt från skalära genom att de förutom storlek också har riktning.



Definition

- En vektor $\mathbf{v}$ är mängden av riktade sträckor, som har egenskapen att två riktade sträckor $\overline{AB}$ och $\overline{CD}$ båda tillhör $\mathbf{v}$ om och endast om de kan överföras till varandra genom parallellförflyttning.
- Man tar alltså ingen hänsyn till var de två vektorerna befinner sig när man gör denna jämförelse.
- Varje riktad sträcka i mängden utgör en representant för vektorn.

Terminologi

Riktad sträcka $\overline{AB}$ eller $\overrightarrow{AB}$.

Fotpunkt, spets I uttrycket $\overline{AB}$ sägs A vara dess fotpunkt och B dess spets.

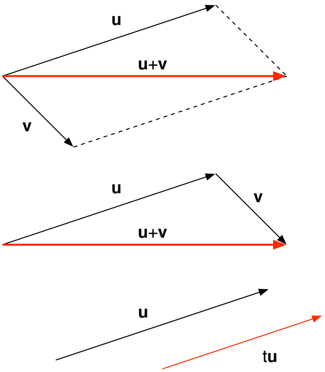
Nollvektor Om $A = B$ i vektordefinitionen så får vi nollvektorn $\mathbf{0}$.

Längd Med längden av en vektor menas längden av en av dess representanter. Längden betecknas $|\mathbf{v}|$ eller $\|\mathbf{v}\|$.

Räkneoperationer för vektorer

Två grundläggande operationer:

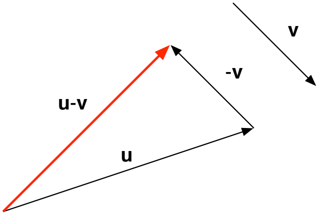
- Addition,
- Multiplikation med skalär.



Subtraktion

Vektorer kan subtraheras:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{v} \quad .$$



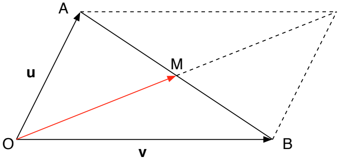
Enhetsvektor

- En vektor $\mathbf{e}$ med egenskapen $|\mathbf{e}| = 1$ kallas en enhetsvektor.
- Att normera en vektor $\mathbf{v}$ görs genom att dividera med vektorns längd:

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

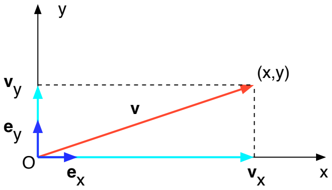
Exempel

Låt O, A, B vara tre punkter i rummet. Antag vidare att $\overline{OA} = \mathbf{u}$ och $\overline{OB} = \mathbf{v}$. Om M är mittpunkten på AB så gäller att $\overline{OM} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Visa det

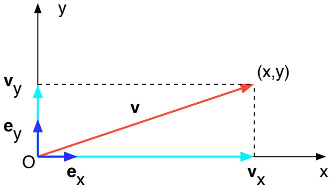


Basbegreppet

Ett koordinatsystem i planet består av en punkt O och en bas $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$. Vi skall göra en intuitiv beskrivning av det mycket viktiga basbegreppet.



Plana fallet Låt $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ vara två icke-parallella vektorer i planet.



Då kan varje vektor $\mathbf{v}$ i planet skrivas

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y \ , \ x, y \in \mathbb{R}$$

3-dim. fallet

3-dim. fallet Låt $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ vara tre vektorer som inte ligger i ett plan.
Då kan varje vektor $\mathbf{v}$ i rummet skrivas

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z \ , \ x, y, z \in \mathbb{R}$$

Bas, koordinater

Planet Två icke-parallella vektorer $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ utgör en bas för vektorerna i planet. I uttrycket $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y$ är $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ koordinaterna för vektorn $\mathbf{v}$ m. a. p. basen $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$.

Rummet Tre vektorer $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, som inte ligger i samma plan, utgör en bas för vektorerna i rummet. I uttrycket

$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$ är $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ koordinaterna för vektorn $\mathbf{v}$

m. a. p. basen $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$.

Annorlunda uttryckt

- Basen $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ i planet består av två icke-parallella vektorer. Dessa vektorer är linjärt oberoende.
- En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ i planet kan skrivas $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y$.
- Basen $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ i rummet består av tre vektorer som inte ligger i samma plan. Dessa vektorer är linjärt oberoende.
- En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ i rummet kan skrivas $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$.

Uttryck av typen $x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y$ kallas en linjärkombination av $\mathbf{e}_x$ resp. $\mathbf{e}_y$.

Anmärkning

Basen är ortogonal om basvektorerna är inbördes ortogonala. Är dessutom basvektorernas längder lika med 1, har vi en ortonormerad bas eller en ON-bas.

När en ON-bas $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ är definierad, förenklas beteckningarna och kalkylerna avsevärt. Man skriver normalt $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y$ på den kortare formen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

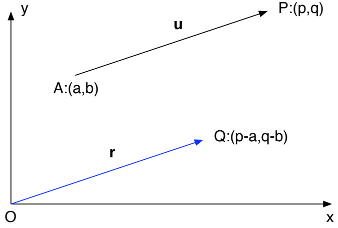
Exempel

Antag att $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ (m.a.p. en ON-bas.) Vi får:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$.
- $t\mathbf{u} = \begin{bmatrix} tu_1 \\ tu_2 \end{bmatrix}$.

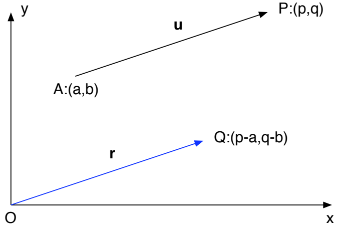
Koordinater

Vi betraktar ett rätvinkligt koordinatsystem i planet. Antag att vektorn $\mathbf{u} = \overline{AP}$ har sin fotpunkt i punkten $A : (a, b)$ och sin spets i punkten $P : (p, q)$.



Då gäller att vektorn $\overline{AP}$ har koordinaterna

$$\overline{AP} = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} p-a \\ q-b \end{bmatrix}.$$

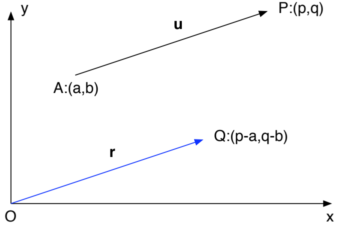


Längden av vektorn $\overline{AP}$ blir med Pythagoras sats

$$|\overline{AP}| = |\mathbf{u}| = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} \quad .$$

Anmärkning

Vi noterar att vektorn $\overline{AP}$ är ekvivalent med ortsvektorn $\mathbf{r} = \overline{OQ}$, som har fotpunkt i origo och spets i punkten Q.



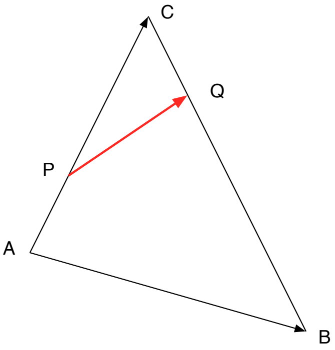
Exempel

Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

- Beräkna $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.
- Beräkna $|\mathbf{v}|$.
- Bestäm en enhetsvektor med samma riktning som $\mathbf{v}$.
- Betrakta punkterna $P : (1, 2)$ och $Q : (4, 3)$. Bestäm avståndet mellan P och Q.

Exempel

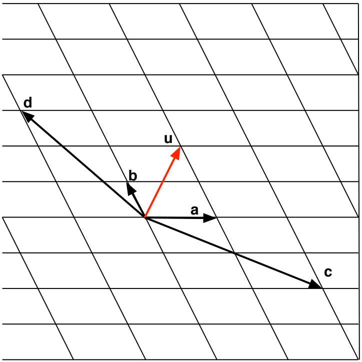
Betrakta triangeln ABC. Antag att $2\overline{AP} = \overline{PC}$ samt att $\overline{CQ} = \dfrac{1}{4}\overline{CB}$. Bestäm koordinaterna till vektorn $\overline{PQ}$ med avseende på basen $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.



Avslutande exempel

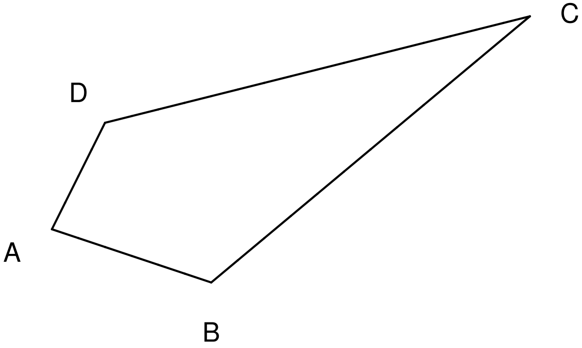
I nedanstående figur är $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ resp. $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ två baser i planet.

1. Vilka koordinater har $\mathbf{c}$ respektive $\mathbf{d}$ med avseende på basen $\mathbf{a}, \mathbf{b}$?
2. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{u}$ med avseende på basen $\mathbf{c}, \mathbf{d}$.

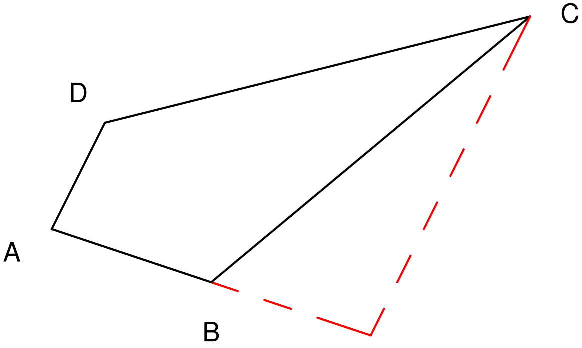


Läs och lös på egen hand

Låt $ABCD$ vara en oregelbunden fyrhörning i planet. Om A väljs som origo och vektorerna $\overline{AB}$ och $\overline{AD}$ väljs till basvektorer får C koordinaterna $(2, 3)$, dvs. $\overline{AC} = 2\,\overline{AB} + 3\,\overline{AD}$. Vilka koordinater får A om C väljs till origo och vektorerna $\overline{CB}$ och $\overline{CD}$ väljs till basvektorer?



Lösningsförslag–tjuvkika inte



Ur förutsättningarna får vi:

$$\overline{AC} = 2\overline{AB} + 3\overline{AD}$$
$$\overline{BC} = \overline{AB} + 3\overline{AD}$$
$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}$$

Detta ger att

$$\overline{AC} = 2(\overline{BC} - 3(\overline{AC} + \overline{CD})) + 3(\overline{AC} + \overline{CD}).$$

Förenkling ger

$$\overline{AC} = 2\overline{BC} - 6\overline{AC} - 6\overline{CD} + 3\overline{AC} + 3\overline{CD}.$$

Vi löser ut $\overline{AC}$:

$$4\overline{AC} = 2\overline{BC} - 3\overline{CD}$$

dvs

$$\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{3}{4}\overline{CD}$$

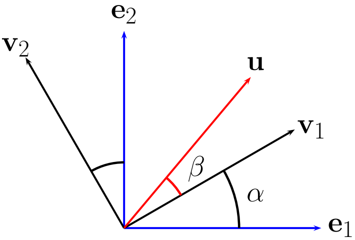
Slutligen får vi:

$$\overline{CA} = \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{3}{4}\overline{CD},$$

dvs. koordinaterna för punkten A är $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ med avseende på basen $(\overline{CB}, \overline{CD})$.

Läs och lös på egen hand

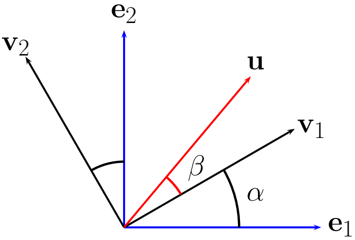
Uttryck en godtycklig enhetsvektor $\mathbf{u}$ i två olika ON-baser. ON-basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är vriden vinkeln α i förhållande till ON-basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Enhetsvektorn $\mathbf{u}$ bildar vinkeln β med basvektorn $\mathbf{v}_1$.



Lösningsförslag–tjuvkika inte

M.a.p. ON-basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ gäller

$$\mathbf{u} = \cos\beta\,\mathbf{v}_1 + \sin\beta\,\mathbf{v}_2 \quad . \qquad (1)$$



M.a.p. ON-basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ gäller

$$\mathbf{u} = \cos(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}_2 \quad . \qquad (2)$$

Vi skriver ett samband mellan de bägge baserna:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2 \quad , \\ \mathbf{v}_2 &= -\sin\alpha\,\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\,\mathbf{e}_2 \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

Vi sätter in (3) i (1) och får

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \\ &= \cos\beta\,(\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2) + \\ &+ \sin\beta\,(-\sin\alpha\,\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\,\mathbf{e}_2) = \end{aligned}$$

(Nästa sida)

$$
\begin{aligned}
&= (\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta)\,\mathbf{e}_1 + \\
&+ (\sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta)\,\mathbf{e}_2 \quad .
\end{aligned}
$$

Vi har med elementär vektorräkning fått de (välkända?) additionsformlerna, genom att vi identifierar slututtrycket med (2).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \cos(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}_2 = \\
&= (\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta)\,\mathbf{e}_1 + \\
&+ (\sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta)\,\mathbf{e}_2
\end{aligned}
$$