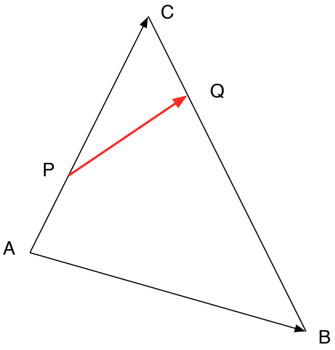
M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 2

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

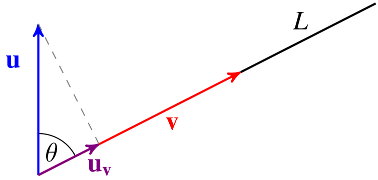
Betrakta triangeln ABC. Antag att $2\overline{AP} = \overline{PC}$ samt att $\overline{CQ} = \dfrac{1}{4}\overline{CB}$. Bestäm koordinaterna till vektorn $\overline{PQ}$ med avseende på basen $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.



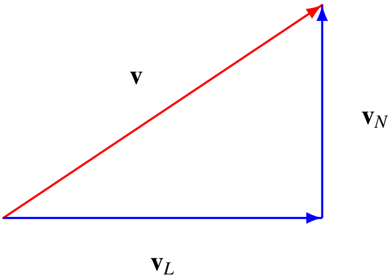
Projektion, koordinater

Låt $\mathbf{u}$ vara en godtycklig vektor och L en rät linje med riktningsvektor $\mathbf{v}$. Den ortogonala (vinkelräta) projektionen $\mathbf{u_v}$ på L är den vektor med egenskapen

- $\mathbf{u_v} \parallel L$,
- $\mathbf{u} - \mathbf{u_v} \perp L$.

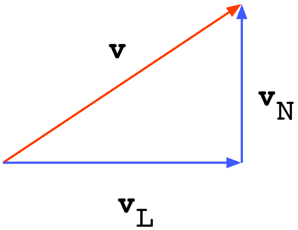


Det är ofta praktiskt att uttrycka en vektor som en summa av två andra vektorer, parallella med och ortogonala mot en föreskriven riktning.



Låt L och N vara två vinkelräta linjer i planet med riktningsvektorer $\mathbf{v}_L$ och $\mathbf{v}_N$. En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ kan då uttryckas som summan

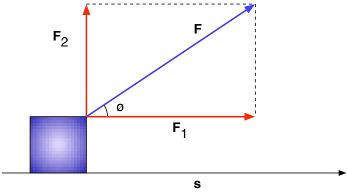
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_N \tag{1}$$



Vektorerna $\mathbf{v}_L$ och $\mathbf{v}_N$ kallas $\mathbf{v}$:s komposanter. Uttrycket (1) kallas en komposantuppdelning av $\mathbf{v}$.

Exempel

Ett föremål dras längs en vågrät väg L med en kraft $\mathbf{F}$ som bildar en vinkel ϕ med förflyttningen.



Enligt definitionen av arbete utför kraften $\mathbf{F}$ arbetet

$$W = |\mathbf{F}|\,\cos\phi\,|\mathbf{s}| \quad \text{(Kraft i förflyttningsriktn. } \times \text{ väg)}$$

Vi komposantuppdelar $\mathbf{F}$ och finner att $|\mathbf{F}|\,\cos\phi = |\mathbf{F}_1|$. Definitionen av arbete visar att

$$W = |\mathbf{F}_1|\,|\mathbf{s}| = |\mathbf{F}|\,\cos\phi\,|\mathbf{s}|.$$

Låt oss uttrycka detta med en alternativ formulering.

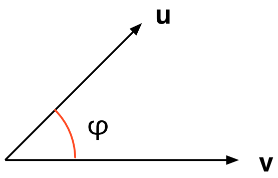
Skalärprodukt

Föregående exempel kan tjäna som inledning till begreppet skalärprodukt.

Skalärprodukten $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, definieras som

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\cos\varphi \quad ,$$

och φ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.



Anmärkning Föregående exempel visar att

$$W = \mathbf{F} \bullet \mathbf{s} \quad (= |\mathbf{F}|\,|\mathbf{s}|\,\cos\varphi)$$

Speciella egenskaper

- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$,
- Om $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala (vinkelräta) (eller någon faktor är lika med nollvektorn),

Räkneregler

Kommutativ lag $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$,

Distributiv lag $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$,

För $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$.

Exempel

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har längderna 1 resp. 2 längdenheter. Vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $\pi/3$.

- Bestäm a så att vektorerna $3\,\mathbf{u} + 2\,\mathbf{v}$ och $2\,\mathbf{u} + a\,\mathbf{v}$ blir ortogonala.

ON-baser och skalärprodukt

Om

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

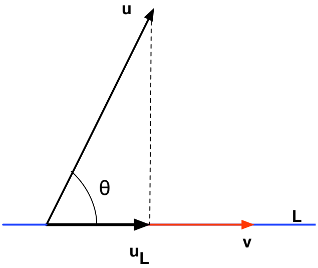
i ON-basen $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$, så är

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2.$$

Anm: Motsvarande gäller för vektorer i rummet.

Vinkelrät projektion

Vektorn $\mathbf{u}$ är godtycklig. Linjen L har riktningsvektor $\mathbf{v}$. Komposanten $\mathbf{u}_L$ kallas $\mathbf{u}$:s (vinkelräta) projektion på L.

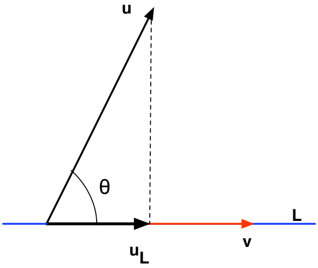


Anm Vi antar inledningsvis att $\mathbf{u}_L$ och $\mathbf{v}$ är parallella och riktade åt samma håll, dvs

$$\mathbf{u}_L = t \cdot \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Anta att $0 < \theta < \pi/2$. Det gäller att

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}_L| &= |\mathbf{u}| \cos\theta = \\
&= \frac{|\mathbf{u}|\, |\mathbf{v}| \cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \\
&= \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad .
\end{aligned}
$$



Vi dividerar med $|\mathbf{v}|$ och får

$$\frac{|\mathbf{u}_L|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} (= t). \quad \text{(Minns att } \mathbf{u}_L = t \cdot \mathbf{v}.\text{)}$$

Projektionsformeln

Vi får som resultat av kalkylerna den s.k. projektionsformeln:

$$\mathbf{u}_L = t \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\, \mathbf{v}. \tag{2}$$

Anmärkning

I (2) kan vi sätta enhetsvektorn $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ och får alternativt

$$\mathbf{u}_L = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{e})\,\mathbf{e}. \tag{3}$$

Mer generellt: Om $\mathbf{u}_L$ och $\mathbf{v}$ är parallella, dvs

$$\mathbf{u}_L = t \cdot \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

innebär detta att komposanten $\mathbf{u}_L$ har längden

$$|\mathbf{u}_L| = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\,|\mathbf{v}| \quad \text{eller} \quad |\mathbf{u}_L| = |\mathbf{u} \bullet \mathbf{e}|.$$

Avslutande exempel

Vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ är given. Bestäm vektorer $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ så att $\mathbf{c}$ är parallell med $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{d}$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$ samt $\mathbf{v} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$.

Räkna på egen hand

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ON-bas). Bestäm vinkeln mellan vektorerna.

Svar: $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{66}}\right)$