M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

Linjär Algebra, Föreläsning 3

Staffan Lundberg / Ove Edlund

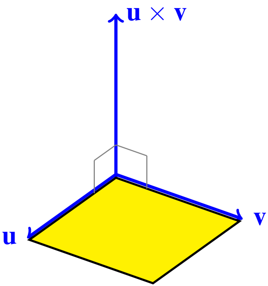
Luleå Tekniska Universitet

En kropp ska förflyttas från punkten $A = (0, -2)$ till punkten $B = (4, 1)$ under inverkan av kraften $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestäm kraftens komposant i förflyttningsriktningen.

Vektorprodukt

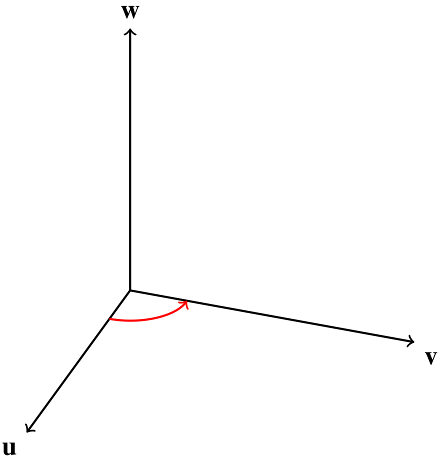
Vektorprodukten av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, är en vektor som uppfyller:

- $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\sin\theta$, där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$,
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ är en högerorienterad trippel,
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot såväl $\mathbf{u}$ som $\mathbf{v}$,
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella.



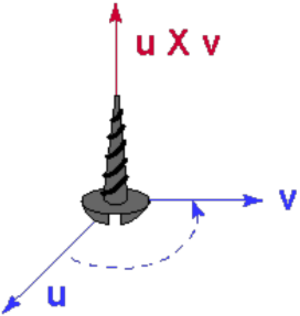
Högerorienterad trippel

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är en högerorienterad trippel, om den minsta vridning, som överför $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ sker moturs, sett från $\mathbf{w}$:s spets.



Skruvregeln

Om man vrider $\mathbf{u}$ kortaste vägen mot $\mathbf{v}$ pekar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ åt det håll en högergängad skruv rör sig.



Skruvregeln

Anmärkning

Två viktiga skillnader mellan skalär- och vektorprodukt:

- skalärprodukten är ett tal, vektorprodukten en vektor,
- vektorprodukten gäller endast i det tredimensionella rummet.

Räkneregler

De viktigaste räknereglerna för vektorprodukten redovisas i följande

- $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$,
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$,
- $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Komponenträkning i en högerorienterad ON-bas

Sats Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har koordinatframställningen

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad , \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

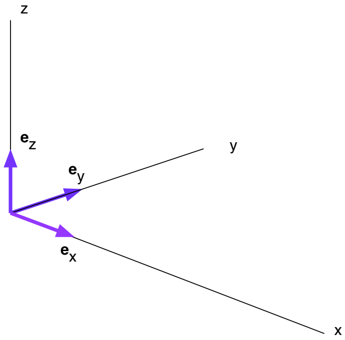
m. a. p. en högerorienterad ON-bas $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, så gäller att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

Bevis

Från definitionen:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e_x} \times \mathbf{e_x} = \mathbf{e_y} \times \mathbf{e_y} = \\
&= \mathbf{e_z} \times \mathbf{e_z} = \mathbf{0}, \\
&\mathbf{e_x} \times \mathbf{e_y} = \mathbf{e_z}, \\
&\mathbf{e_y} \times \mathbf{e_z} = \mathbf{e_x}, \\
&\mathbf{e_z} \times \mathbf{e_x} = \mathbf{e_y}.
\end{aligned}
$$



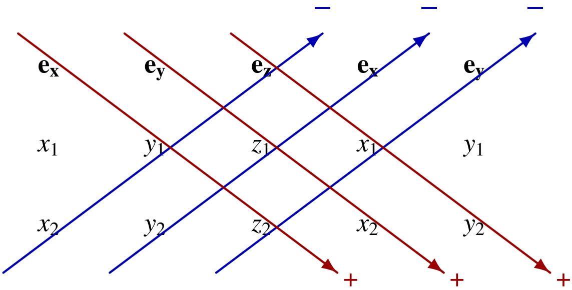
Detta ger (för z-komponenten):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (x_1\mathbf{e_x} + y_1\mathbf{e_y} + z_1\mathbf{e_z}) \times (x_2\mathbf{e_x} + y_2\mathbf{e_y} + z_2\mathbf{e_z}) = \\
&= x_1y_2(\mathbf{e_x} \times \mathbf{e_y}) + y_1x_2(\mathbf{e_y} \times \mathbf{e_x}) + \ldots = \\
&= (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{e_z} + \ldots
\end{aligned}$$

Vi resonerar på analogt sätt för de återstående komponenterna.$\square$

Sarrus regel

Pierre Frédéric Sarrus, fransk 1800-talsmatematiker, upptäckte ett schema för att lätt komma ihåg hur vektorprodukten beräknas.



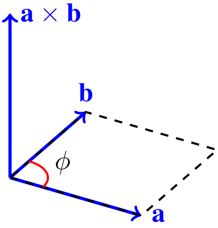
Exempel

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\cdots}_{\text{Sarrus regel}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Avslutande exempel

Bestäm arean hos det parallellogram som spänns upp av kantvektorerna

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$



Anm Vad gäller för $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$?

Läs och lös på egen hand

Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 0, 2)$ samt $C = (0, -1, 1)$.

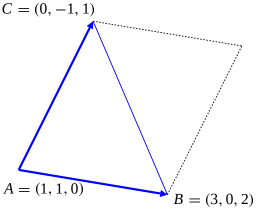
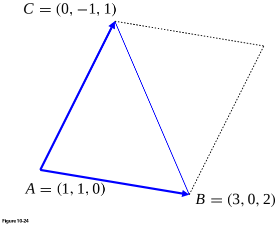


Figure 10-24

Lösningsförslag–tjuvkika inte

Den sökta arean är hälften av arean av den parallellogram som spänns upp av vektorerna $\overline{AB}$ och $\overline{AC}$.

Men höjden mot $|\overline{AB}|$ är lika med $|\overline{AC}|\ \sin\theta$, där θ är vinkeln mellan $\overline{AB}$ och $\overline{AC}$.



Vi åberopar definitionen av vektorprodukt och den sökta arean blir:

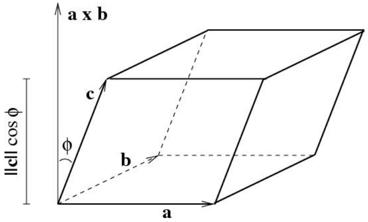
$$\frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Fullborda kalkylerna som övning.

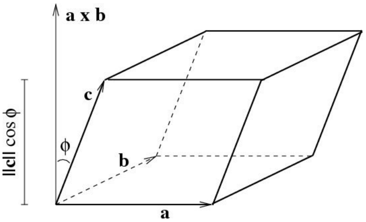
Svar: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Extra: Skalär trippelprodukt

Uttrycket $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ kallas den (skalära) trippelprodukten av vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$.



Geometrisk tolkning: Volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är beloppet av trippelprodukten av vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$.



Anm Man kan också definiera en vektoriell trippelprodukt, exempelvis

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Anmärkning

Trippelprodukten $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ används ofta för att avgöra om tre vektorer ligger i ett plan.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \quad \mathbf{a},\, \mathbf{b} \text{ och } \mathbf{c} \text{ högerorient.} \\ < 0 & \Rightarrow \quad \mathbf{a},\, \mathbf{b} \text{ och } \mathbf{c} \text{ vänsterorient.} \\ = 0 & \Rightarrow \quad \mathbf{a},\, \mathbf{b} \text{ och } \mathbf{c} \text{ i samma plan} \end{cases}$$

Att fundera på…

Bestäm a så att punkten $P : (a, -2, -6)$ ligger i samma plan som punkterna $P_1 : (7, 3, 8)$,$P_2 : (-5, -3, -10)$ och $P_3 : (4, -3, -1)$.

Svar: $a = -2$.