M0043M Integralkalkyl och Linjär Algebra, H14,

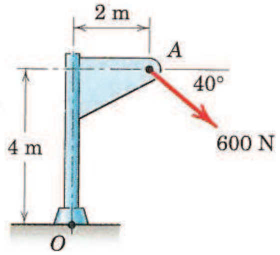
Linjär Algebra, Föreläsning 4

Staffan Lundberg / Ove Edlund

Luleå Tekniska Universitet

Bestäm momentets storlek omkring punkten O.

Tips $\mathbf{M} = \overline{OA} \times \mathbf{F}$

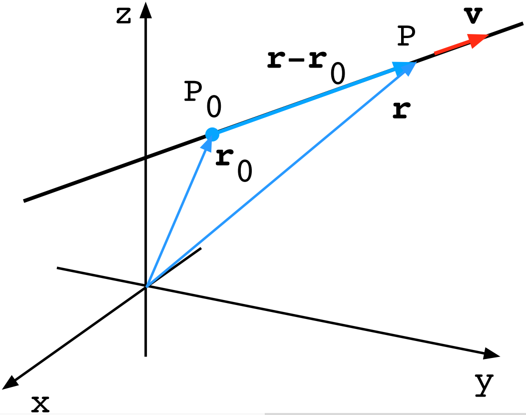


(Svar: 2610 Nm.)

Linjer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

En rät linje i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ bestäms (entydigt) av en punkt P_0 (med ortsvektor $\mathbf{r}_0$) och en riktningsvektor $\mathbf{v}$.

En punkt P (med ortsvektor $\mathbf{r}$) ligger på linjen om och endast om vektorn $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ är parallell med $\mathbf{v}$.



Räta linjens ekvation på vektorform

Detta uttrycks med räta linjens ekvation på vektorform

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\,\mathbf{v} \tag{1}$$

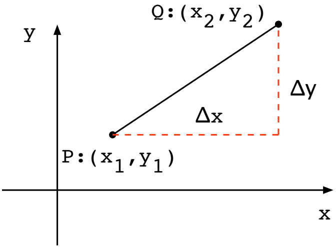
eller

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v} \quad , \tag{2}$$

där $t \in \mathbb{R}$.

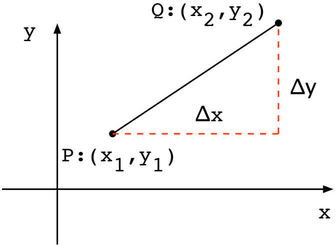
Räta linjen i planet

Antag att en rät linje passerar genom punkterna $P : (x_1, y_1)$ och $Q : (x_2, y_2)$



Linjens riktningskoefficient

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Om $R : (x, y)$ är en godtycklig punkt på linjen, så gäller

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k, \tag{3}$$

så att

$$y = k(x - x_1) + y_1. \tag{4}$$

Normalform

Vi känner nog igen uttrycket (4), som är ett annat sätt att skriva den välbekanta räta linjens ekvation

$$y = kx + m, \quad \text{där } m = y_1 - kx_1.$$

Vi kan alternativt beskriva uttrycket (4) som en generell linjär ekvation:

$$Ax + By + C = 0,$$

där A och B inte är noll samtidigt. Den räta linjen (4) är då skriven på *normalform*.

Exempel Visa att vektorn $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ är normalvektor till linjen $Ax + By + C = 0$.

Lösningsförslag

Punkterna $P(x_1, y_1)$ resp. $Q(x_2, y_2)$ antas ligga på linjen. Därför gäller:

$$\begin{cases} Ax_1 & + & By_1 & + & C & = & 0 \\ Ax_2 & + & By_2 & + & C & = & 0 \end{cases}$$

Vi subtraherar och får

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0 \quad .$$

Tolkning

Detta kan alternativt uttryckas som skalärprodukten

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = 0 \quad .$$

Detta betyder att vektorerna $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ och $\overline{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ är ortogonala, dvs. $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ är en normalvektor till linjen, eftersom $\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ är en riktningsvektor till linjen.

Exempel

Bestäm en riktningsvektor till linjen med ekvationen

- $y = kx + m$,
- $Ax + By + C = 0$.

Lösningsförslag

Punkt 1 Välj den oberoende variabeln x som parameter, dvs. sätt $x = t$. Detta medför att $y = kt + m$, och vi skriver linjens ekvation på parameterform

$$\begin{cases} x & = & t \\ y & = & m + kt \end{cases}$$

På vektorform blir linjens ekvation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Vi konstaterar: Vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$ är en riktningsvektor till linjen.

Punkt 2 Eftersom vektorn $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ är normalvektor till linjen $Ax + By + C = 0$, kan vi förslagsvis välja vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -B \\ A \end{bmatrix}$ till riktningsvektor. (Varför?)

Fallet $\mathbb{R}^3$

Vi betraktar situtationen i rummet.

Om vektorerna $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$, kan $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$ alternativt skrivas:

Räta linjens ekvation på parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,\alpha \\ y = y_0 + t\,\beta \\ z = z_0 + t\,\gamma \end{cases} \qquad \text{där } t \in \mathbb{R}.$$

Viktig anmärkning

För att beskriva en linje i $\mathbb{R}^3$ **måste vi använda parameterframställning**. En allmän linjär ekvation

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

i $\mathbb{R}^3$, är inte en beskrivning av en linje.

Anmärkning

Det existerar en mindre vanlig form för tredimensionell linje, den sk. parameterfria formen:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,\alpha \\ y = y_0 + t\,\beta \\ z = z_0 + t\,\gamma \end{cases} \quad \text{skrivs alternativt} \quad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

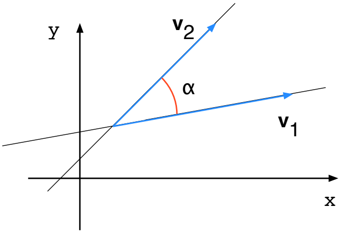
Avslutande exempel

Bestäm vinkeln $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ mellan linjerna

$$y = k_1 x + m_1$$

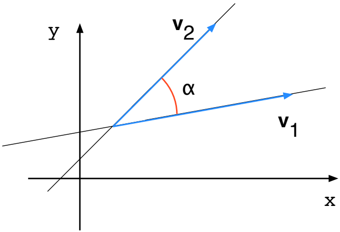
och

$$y = k_2 x + m_2$$



Lösningsförslag

Genom att parameterframställa linjerna, erhålls riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ k_1 \end{bmatrix}$ respektive $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k_2 \end{bmatrix}$



Med definitionen på skalärprodukt får vi att

$$\cos\alpha = \frac{|1 + k_1\, k_2|}{\sqrt{1 + k_1^2}\,\sqrt{1 + k_2^2}} \quad .$$

Anmärkning

Om $k_1\, k_2$=-1 så är linjerna ortogonala. Nu förstår vi formeln vi använde i M0038M!

Att fundera på. . .

Visa att linjerna

$$L_1 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

och

$$L_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

skär varandra och bestäm skärningspunkten.

Svar: $(3, 0, -1)$